数学的モデリングの教材開発と評価

Development and Evaluation of Teaching Materials of Mathematical Modeling

佐　藤　幸　江（人間科学部こども学科教授）
Yukie SATO (Faculty of Human Sciences, Department of Child Study, Professor)

〈要旨〉

新学習指導要領では，これまでの算数・数学教育で言われている「算数の時間に学習したことを活用する力が育成されていない」という課題を解決するために，実生活の問題を解決するための数学的モデル化の学習活動を提示している。つまり，実生活の問題の解決を目標に，それを数学の世界で考えるという問いを立て，数学的モデルをつくり，数学的に処理した結果を解釈・検討して，妥当な結果が得られるまで修正を繰り返していく活動の必要性が述べられている。

しかし，単に現実事象と関連付けただけでは，授業は成立しない。そこで，本研究においては，小学校の授業において，数学的モデリングの教材化をめざして開発された具体例をもとに，どのような配慮事項が必要であるかを明らかにしたいと考えた。その結果，資料の提示，基礎的・基本的能力の習得とのバランス，展開の工夫の必要があるということが明らかになった。

〈キーワード〉

小学校算数科　新学習指導要領　実生活の問題　数学的モデリング

1　はじめに

「初等中等教育における算数・数学教育の改善についての提言」(2016) では，日常生活における数学の必要性や科学や技術分野における定量的な表現としての数学の重要性を述べた後に，次のように指摘している。[(1)]

> このように数理科学は社会生活や科学と技術に重要な役割を果たしており，算数・数学教育は，グルーバル社会を生き抜く上で必要な力の核心となる力を培うために必要欠くべからざるものである。しかし，我が国では算数・数学を学ぶ意義，とりわけ，数学の社会的有用性についての意識が他の国より伝統的に低く，数学を学ぶことと将来の職業との関係がつかめないでいる生徒が多い。

これらの指摘は，中央教育審議会算数・数学ワーキンググループで審議資料として提示された，右側の2つの資料からも裏付けられる。【図1】は，「数学の勉強が楽しい」「数学が日常の問題を解決するのに役に立つ」と考えている日本の生徒の割合が，諸外国と比較するとかなり低いことをTIMSS2011の結果をもとに，また【図2】は平成27年度全国学力・学習状況調査の結果をもとに，いわゆる理数離れの課題が見られること示している。

数学・理科の学習に対する生徒の意識　―TIMSS2011質問紙調査結果から―

◆国際平均に比べて，日本の中学生は学習の楽しさや実社会との連関に対して肯定的な回答をする割合が低いなど，学習意欲面で課題がある。

※ 生徒質問紙調査（対象：中学校2年生）において，下記項目につき，「強くそう思う」，「そう思う」と回答した生徒の割合の合計	数学		理科	
	日本	国際平均	日本	国際平均
数学・理科の勉強は楽しい	48%	71%	63%	80%
数学・理科を勉強すると日常生活に役立つ	71%	89%	57%	83%
他教科を勉強するために数学・理科が必要	67%	81%	35%	70%
志望大学に入るために良い成績が必要	72%	85%	59%	77%
将来望む仕事につくために良い成績が必要	62%	83%	47%	70%
数学・理科を使うことが含まれる職業につきたい	18%	52%	20%	56%

（出典）IEA国際数学・理科教育動向調査（TIMSS2011）質問紙調査結果より文部科学省作成

図1：TIMSS2011質問紙調査結果から

算数・数学の興味・関心等　―平成27年度全国学力・学習状況調査の結果から―

◆学習に対する関心・意欲・態度に関する質問項目について，小学校より中学校で肯定的回答が減少する傾向がある。教科の重要度は認識されているが，算数・数学の理解度は十分ではない。（同一世代に当たる平成24年度の小学校6年生と平成27年度の中学校3年生の回答状況を比較）

〇学習に対する関心・意欲・態度

教科の勉強が好き

	H24　小学校	H27　中学校	差
理科	82%	62%	20
国語	63%	60%	3
算数・数学	65%	56%	9

教科の勉強は大切

	H24小学校	H27中学校	差
理科	86%	70%	17
国語	93%	90%	3
算数・数学	93%	83%	10

教科の勉強が分かる

	H24小学校	H27中学校	差
理科	86%	67%	19
国語	83%	75%	9
算数・数学	79%	72%	7

教科の勉強は役立つ

	H24小学校	H27中学校	差
理科	73%	55%	19
国語	89%	84%	5
算数・数学	90%	72%	18

注）割合は小数第1位を四捨五入

（出典）文部科学省・国立教育政策研究所「平成27年度全国学力学習状況調査　児童生徒質問紙調査結果（児童生徒質問紙）より文部科学省作成

図2：平成27年度全国学力･学習状況調査の結果から

これらの指摘をもとに，新学習指導要領（2017）においては，次頁【図3】に示されているように，図の中央に配置されている数学の問題を解決する過程の重要性はもちろんであるが，それに加えて，2つのサイクルの重要性を示している。第1のサイクルは，図の左側に示されている生活の中から算数の問題を見い出し解決するサイクル（以下，「現実の世界からのサイクル」）であり，第2のサイクルは，右側にある数学の問題を見い出し解決するサイクル（以下，「数学の世界からのサイクル」）である。(2)

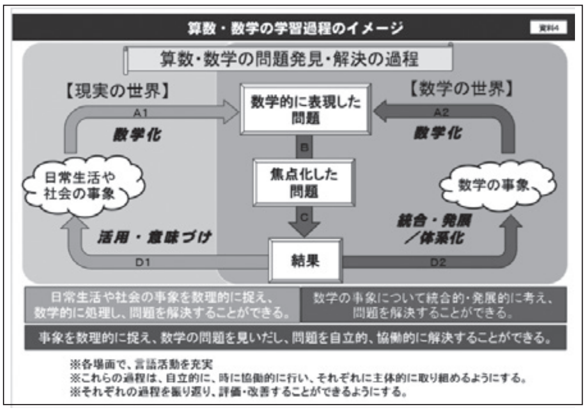

図3：算数･数学の学習過程のイメージ

このように，数学的に解決した結果を，現実の世界に「活用・意味づけ」する段階，そして数学の世界を「統合・構造化」する段階の重要性であり，さらにこの両者のバランスの重要性も読み取ることができる。そして，この算数・数学の学習過程のイメージ図は，数学的モデル化のプロセスであると考える。しかし，小学校段階での実践事例はまだまだ少ない。

そこで，本研究においては，小学校で教材化をめざして開発された具体例をもとに，どのような現実の世界を教材化することにより，数学的モデリングを取り入れた授業が実施可能となるかを評価し，また実施の際にはどのような配慮が必要であるのかを明らかにし，小学校における数学的モデリングを取り入れた授業の普及をめざしたいと考えた。

1　研究の目的と方法

2－1　目的

小学校の授業において，数学的モデリングの教材化をめざして開発された具体例をもとに，どのような現実の世界を教材化すると数学的モデリングを取り込んだ授業が実施可能となるかを評価し，どのような配慮事項が必要であるかを明らかにする。

2－2　方法

① 数学的モデリングに関する先行研究を検討する。

② 小学校の授業において，数学的モデリングの教材化をめざしたことを指導案に明記している具体的な実践3事例をもとに，どのような現実の世界を教材化しているか，数学的モデリングを取り入れた授業として成立しているかについて，授業記録から評価する。

3つの対象事例は，10月・11月に公開された算数科の授業のうち，指導案に「現実の世界からと数学の世界から」や「2つのサイクルの重要性」に関して記述している授業である。公開研究会等のため，ビデオでの記録ができなかったため，筆者の作成したフィールドノーツを元に評価を行った。

評価の際には，多くの事例で取り入れている三輪（1983）の「数学的モデル化過程」（第3章参照）を評価の指針とした。(3)

③ 授業を実施する際にはどのような配慮が必要であるのか，指導案と授業記録から共通事項を明確にする。

3　数学的モデリングの研究の検討

わが国のモデリング研究は，三輪（1983）による「数学教育におけるモデル化についての一考察」を契機として盛んとなったと言われている。数学的モデリングを取り入れた授業は，中学校や高等学校での事例が多く見られる。

ここでは，数学的モデリングの教材化に関する主な研究成果を検討する。

3－1　三輪の数学的モデリングの捉え

三輪は，それまでの経験・観察をもとにしてある事象が探究を要するという認識があるという前提の下で数学的モデル化過程を，次の【図4】のように示している。

(1) その事象に光を当てるように，数学的問題に定式化する（定式化）。
(2) 定式化した問題を解く（数学的作業）。
(3) 得られた数学的結果をもとの事象と関連づけて，その有効さを検討し，評価する（解釈，評価）。
(4) 問題のより進んだ定式化をはかる（より良いモデル化）。

図4：数学的モデル化過程（三輪）

3－2　池田（1999）のパイプライン問題

池田（1999）は，数学的モデリング活動を以下のように捉えている。(4)

実際の問題の解決を目標に，実際の問題を数学化して数学的モデルをつくり，解釈・検討して不都合が生じれば数学的モデルの修正を適宜繰り返し，より適した数学的モデルをつくっていく活動

また，池田ら（1993）は，こうした数学的モデリング活

動の過程を【図5】に示している。[5] この図は，先に示した新学習指導要領のめざす算数・数学の学習過程のイメージ，および三輪の数学的モデル化過程と重なる部分が多く見受けられる。中学校や高等学校における事例も，三輪および池田のモデル化過程をもとに教材化が進められている。

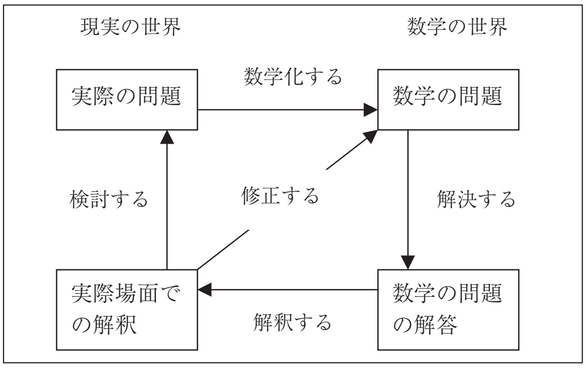

図5：数学的モデリング活動の過程

さらに，前述の池田（1999）は，数学的モデリング活動の練習問題として，以下のような問題を提示している。

> パイプラインは，油田装置（海底に穴をあけて）と海岸線にある精油所とをつなぐためにつくられます。コストをできる限り安くするためには，パイプラインをどのようにつなげばよいでしょう。ただし，パイプラインは「陸上に」つくる場合と「海底に」つくる場合ではコストが異なるので，最もコストの安いつなぎ方は，パイプの長さが最短になるときとは限りません。適当に条件を設定して，その条件のもとでどういうつなぎ方がよいか詳しくレポートにまとめましょう。

数学的モデリング活動をうまく遂行するために必要な考え方を「数学的モデリング活動を促進する考え方」と呼び，そのうち代表的な考え方を【表1】のように示している。

表1：数学的モデリング活動を促進する代表的な考え方

方向	Type	モデリングを促進する代表的な考え方
現実の方向	1	①　曖昧なものはないか ②　曖昧なものは明確にしよう [条件の明確化の考え]
	2	①　実際の解決に影響するか ②　実際の解決への影響はどの程度か [関数的な考え，抽象捨象の考え]
数学の方向	3	①　数学的に解決しやすいか ②　数学的に解決しやすくしよう [抽象捨象，理想化，単純化，特殊化の考え]
	4	①　数学的に表現できるか ②　どのように数学的に表現するか [記号化，図形化，数量化の考え]

竺沙（2000）は，このパイプライン問題の利点として，「様々な条件設定を行うことによって，解決過程を再び循環させることが可能となる。それによって，数学的結果を現実世界の知識と照らし合わせて吟味し，現実的な解答を得るようにモデルや数学的結果を修正する練習を行うことができる」こと，「現実的な場面を採りあげているので，数学的結果をそのまま解答にするなど現実を無視して答えを導くことは無意味であるということを指導できる機会になる」ことを挙げている。一方で，大きな問題点があると指摘している。[6]「パイプラインを建設するということは，中学生の日常生活の中では起こり得ないので，中学生にとって追求する必要のある問題ではない」こと，「数学的結果を現実の世界と照らし合わせて解釈・吟味をする必要があるけれども，この問題では。中学生は，数学的結果が正しいかどうかを実際に検証することができない」ことを挙げている。

3－3　大澤（1996）のリレー問題

「運動会の全員リレーに勝ちたい。どうしたらよいか」という問題を用いて，数学的モデリング活動を中学生に指導した実践報告をしている。[7] この問題を解決する最大の利点について，先の竺沙は，実際にリレーを行い，生徒が数学的結果の妥当性を検証できる点にあるとしている。[8] これにより，「現実の事象から数学的モデルを作成する『定式化』の段階や数学的結果から現実の答えを導く『解釈・吟味』の段階において，現実の世界と数学の世界を行ったり来たりする練習が可能となる。これは，数学的モデリング活動の大きな特徴の一つである現実の世界と数学の世界とのやりとりを経験できるということである。」としている。

多くの生徒にとって現実の問題として解決する価値のある問題となりうる問題，中学生にとって真に現実的な問題で，しかも数学的処理が比較的容易であるような問題の有効性を述べている。

これらの指摘は，小学校の教材を開発する上でも，示唆に富んでいると考える。

4　小学校における数学的モデリング教材

小学校の授業において，数学的モデリングの教材化をめざしたことを指導案に明記している具体的な実践3事例をもとに，どのような現実の世界を教材化しているか，数学的モデリングを取り入れた授業として成立しているかについて，授業記録と三輪の数学的モデル化過程「定式化→数学的作業→解釈・評価→よりよいモデル化」と関連づけながら評価を試みる。

4－1　事例1：第3学年
「分数～設計図をよみとこう～」

設計図にかかれた分数を利用して，ミニチュアの家を完

成させるというのが現実の問題解決場面である。
① （定式化）
　本時は，設計図通りの窓枠を作るために3/4mの長さのテープをグループ毎に作成する学習活動である。まず，現実モデルを確認した児童は，定式化して数学モデルを作ることになる。児童は，テープを3つにおればよいという予想をもって取り組みだした。
② （数学的作業）
　元の長さに言及しないまま，児童たちは自分なりの3/4mを作っていく。その際に，折るだけでなく切って3/4mを作り，それを【図6】にあるように，教師は黒板に貼っていった。

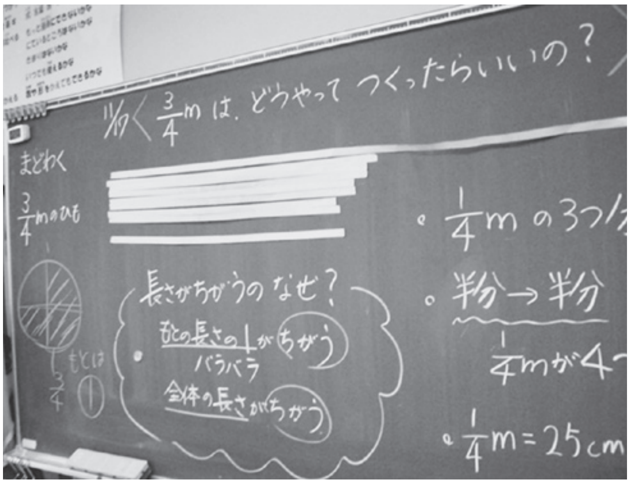

図6：本時の板書

③ （解釈，評価）
　数学的結果を解釈・吟味して，現実の問題に答えを出す過程である。3/4mを作るうちに，それぞれの3/4m の長さが違っていることに気づきだす児童が見られた。教師は「こんなに3/4mの長さが違っていたら，設計図通りの窓枠にならないね」と，現実の問題に戻し，児童の思考の修正を迫った。
④ （より良いモデル化）
　本来であれば，ここで元の長さの違いが，それぞれ作った3/4mの長さの違いになっているという考えに修正されるところである。
　しかし，本学級の児童は，自分たちが作った3/4mは，「ある長さを4つに折った3つ分だから，これでよいのだ」と主張して譲らなかった。教師も，「1/4m=25㎝」を提示して自分たちで作ったテープの長さを測らせたり，「元の長さが違うから」ということにもっていこうとしたり，様々な試みを行なったが，結局終わりの時間がきてしまった。
　ここで，児童の考えが修正され「より良いモデル化」へと移行しなかった要因としては，2つのことが考えられる。1つ目は，（数学的作業）の際に，教師が意図的に児童に目を閉じさせて「これからテープを配ります」とアトランダムに1m，2m，4mのテープを配布し，すぐに分ける作業に入ってしまったために，児童に「元の長さ」を確認し意識化する時間がなかったことが挙げられる。2つ目としては，ミニチュアの家作りという現実の問題が，縮尺の考えのない3年生にとっては，数学モデルを作る際にあまり身近でない問題，必死で考える必要のない問題であったことが挙げられる。

4－2　事例2：第5学年
「きみはコインパーキングのオーナーになれるか」
　本単元は，広島市教育委員会が作成した「言語・数理運用科小学校第6学年」（2010年）の副読本を元に，第5学年用に援用しものである。[9]
　100円パーキングの看板に書かれている数字や内容をもとに，その駐車場に車を止めたらいくら支払うのか，どの駐車場が割安なのか等考える問題になっている。
① （定式化）
　本時は，1時間あたりのかかる金額をA，B，C駐車場の看板で比較することがねらいとなる。【図7】の看板を全体に提示した。はじめのうちは，あまり現実問題を解いた経験のない学級であったために，児童は，「オールタイム」「20分/100円」などの意味がわからずにいた。それらについて教師は，対話的に解決を試み，だんだんと児童もこれまでの駐車場を使った経験から定式化して「1時間あたり」を考えればよいのではという数学モデルに気づき始めた。

図7：A駐車場の看板

② （数学的作業）
　そこで，教師はヒントとして「タイムライン」のワークシートを配布し，図をもとに考えてもよいことをアドバイスした。
　A駐車場の1時間あたりの料金が出されたことで，教師は次にグループ毎で解決する課題として【図8】のB駐車場とC駐車場の看板を配布した。ところが，C駐車場の方

のグループは簡単に問題解決できたにも関わらず，B駐車のグループはもめにもめていた。その理由は，B駐車の看板には，「軽自動車用と普通自動車用」「昼間と24時間」で料金が違う料金設定がされていたのである。現実ではコインパーキングの工夫として大事な要素ではあるが，児童にとっては分かりにくいものとなった。

図8：B駐車場の看板

③（解釈，評価）

普通自動車用で統一することは簡単に解決できたが，「昼間と24時間」問題は，C駐車場のグループの児童も巻き込んで現実問題への解決に向かうこととなった。事前に配布された「タイムライン」を記入して考えることのできるワークシートをうまく使いながら，理解が進まない友達に説明する姿が見られたり，「何時から何時まで止める」という条件がはっきりすればどちらの料金体系がお得か知ることができると発言する児童が現れたりした。

④（より良いモデル化）

それぞれの駐車場の看板の数字や内容の意味をきちんと把握することで，どの時間にどの駐車場を使うとお得かということが分かることに，だんだんと気づいて行くことができた。

本教材で一番の問題となったのは，どのような看板をどのタイミングで提示すればよいかということである。現実とはいえ，あまりに複雑な料金設定の看板を提示してしまうと，児童の思考に混乱が見られることが分かった。

また，ある児童は，授業後，担任に次のような話をしに来ていた。「駐車場を選ぶときには，料金だけでなくて，どこに止めるかも大事。駅に行くなら，高くても駅のそばにある駐車場に止めるよ」という話であった。ここまで現実を把握していたので，「きみはコインパーキングのオーナーになれる」と担任は褒めてあげたという。

4－3　事例3：第5学年「単位量あたりの大きさ」

こちらの学級では，「解決したい」という学ぶ意欲を引き出すために，児童が関心を持ちそうな「スーパーでの飴のつかみ取り」をする問題場面を設定している。人数の異なるグループにすることで，「人数が多いグループが有利」という問題場面を引き出し，平均の考えに気づかせ，均等化して数でとらえることをねらいとしている。また，普段は小数を用いて表さない分離量も平均で考える場合は，小数を用いることにも気づかせることができる。

①（定式化）

「袋入りの飴か，つかみ取りか，どちらがお得か」という問題設定であった。「袋には，40個も入っているのだからお得だよ」という意見が多く出されたが，教師はここで袋入りの飴1個分の値段を出さなかった。「実際につかんで見ないと比べられない」ということで，グループ代表の飴のつかみ取りが始まった。

②（数学的作業）

【図9】の板書にあるようにつかんだ飴の数を可視化することで，児童は平均の考えかたにすんなりと進んでいった。現実問題を定式化して数学モデルを作るところは，各グループ活動で行った。

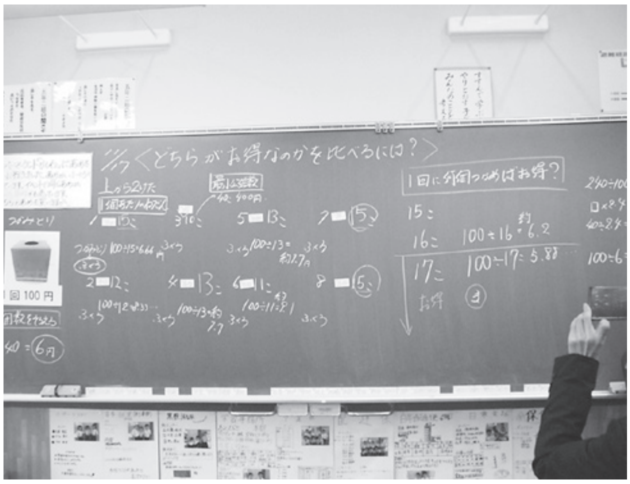
図9：つかみ取りの飴の数を板書

③（解釈，評価）

ところが，いざグループの平均を出していったところ，つかんだ数が同じであるのに，平均値が違うというグループが出てきた。児童は，前時に立ち返り「どちらをもとに平均値を出すかが違っている」ことをつきとめていった。本学級の児童はかなり数学的に思考する力が高い児童が多かったため，そこに行き着くことができたが，8グループの数値を見てそのような解釈に向かうのは，なかなかハードルが高いと言えよう。

④（より良いモデル化）

「飴の1個分の値段を出す」ことで，袋入りと比較ができることを確認して，本時は終わった。

ここで，1つ指摘できることは，現実的な問題となったときに，「つかみ取り」のワクワク感は値段には代替えで

きないということである。本学級の児童の中にも，授業の終了時に「袋入りの方が安いけれど，つかみ取りでとった方が楽しいよ」とつぶやく声があった。正に，数学では割り切れないことが現実問題には含まれているということである。

5　数学的モデリング教材実施に向けて

〈成果〉

具体的な実践3事例をもとに，どのような現実の世界を教材化しているか，数学的モデリングを取り入れた授業として成立しているかについて，授業記録から評価をしてきた。

以上のことから，生活体験のまだ少ない児童に対して，現実の世界を扱った算数授業が，児童自身の周りの現実事象を改めて認識させるきっかけにもなり得ることが明らかになった。

また，小学校において数学的モデリングの授業を実施することで，竺沙の指摘にあった「様々な条件設定を行うことによって，解決過程を再び循環させることが可能となる。それによって，数学的結果を現実世界の知識と照らし合わせて吟味し，現実的な解答を得るようにモデルや数学的結果を修正する練習を行うことができる」こと，「現実的な場面を採りあげているので，数学的結果をそのまま解答にするなど現実を無視して答えを導くことは無意味であるということを指導できる機会になる」ことが明らかになった。

つまり，現実の問題を解決するために，算数・数学の世界を経由することで，算数・数学が日常生活の問題を解決できることを実感することにつながることが期待できる。

しかし，数学的モデリングを教材化するに当たっては，様々な配慮事項があることも明らかになった。

1）資料の提示

駐車場問題にあるように，あまりに複雑な料金設定の看板は児童の思考を停止することにつながる可能性がある。また，小学校3年生にとって「家の設計図」問題が身近であるかという指摘も行なった。

目の前にいる児童のこれまでに習得してきた力を見極めて資料を提示する必要がある。

2）基礎的・基本的内容の習得とのバランス

分数における「元の長さが違う」こと，単位量あたりの大きさにおける「どちらをもとに平均値を出すか」など，それまでの学習で何をどこまで抑えておく必要があるかの検討が大事である。

3）展開の工夫

具体的な実践3事例ともに，三輪の数学的モデル化のプロセスを踏んでいることから，これを参考にしながら小学校における数学的モデリングを教材化できる可能性を示した。

〈課題〉

池田の「数学的モデリング活動を促進する考え方」を本研究に活かしきることができなかった。この考え方をもとに実践を分析することで，さらに小学校における数学的モデリングの教材化に新しい知見を加えることができるのではと考える。

引用・参考文献

⑴ 日本学術会議 数理科学委員会 数理教育分科会（2016）「初等中等教育における算数・数学教育の改善についての提言」p.ii.

⑵ 文部科学省（2017）『小学校学習指導要領解説 算数編』p.8.

⑶ 三輪辰郎（1983）.「数学教育におけるモデル化についての一考察」.筑波数学教育研究第2号．pp.117-125.

⑷ 池田敏和（1999）,「数学的モデリングを促進する考え方に関する研究」，日本数学教育 学会，『日本数学教育学会誌論究』，第 81 巻，pp.3-17.

⑸ 池田敏和，山崎浩二（1993）,「数学的モデリングの導入段階における目標とその授業 展開のあり方に関する事例的研究」，日本数学教育学会，『日本数学教育学会誌数 学教育』，第 75 巻，第1号，pp.26-32.

⑹ 竺沙敏彦（2000）「学校数学における現実の問題を解決するための数学的モデリング活動に関する研究」兵庫大学大学院学位論文，pp.73-79.

⑺ 大澤弘典（1996），「現実場面に基づく問題解決―グラフ電卓を利用した合科的授業展 開を通して―」，日本数学教育学会，『日本数学教育学会誌』，第 78 巻，第9号，pp.16-20.

⑻ ⑹に同じ，pp.80-84.

⑼ 広島市教育委員会「言語・数理運用科小学校第6学年」pp.5-14（2010）.