

経済成長過程における資本分配率の時間発展

Time development of capital share in the process of economic growth

紮野 宏
Hiroshi Kaseno

目次

1. はじめに
2. 資本分配率の時間発展
3. モデルの解
4. 結論

1. はじめに

経済成長理論に関する研究は1950年代末から1960年代にかけて主としてソローによって行われた^[1]。ソローは理論の単純化のためにいくつかの仮定をおいた。産出量は資本と労働の投入量の増加関数であり、資本と労働について一次同次であると仮定する。もう一つは産出量（所得）のうちある一定割合が貯蓄されると仮定する。これらの仮定から、1人当たりの資本ストックがいかなる状態から出発しても、長期的には定常状態に収束することを導いた。いったん定常状態に入ると、1人当たりの資本ストックは成長しないが、経済全体の資本ストックは労働成長率と同じ割合で成長する。貯蓄率が増加すると、1人当たりの資本ストックは増加し、1人当たりの生産も増加する。さらに1人当たりの消費が最大となるような定常状態を実現する貯蓄率は資本分配率に等しくなる（これは黄金率と呼ばれている）ことを導いた。

しかしソローモデルにおいて資本分配率は定数と考えられていて、理論的にこの時間発展を導くことはなされていない。また実際の経済データを用いた分析においては、資本分配率をパラメータと考えその値を決めることがなされてきたようである。しかし、ここでは資本分配率を時間の関数とし、経済データによることなく理論の内部構造自体から、経済成長過程におけるその時間発展の様子を導出することを目指す。この目的のためにソローの経済成長理論の考えに沿いつつ、参考文献^[2]の考え方を用いておこなう。

2. 資本分配率の時間発展

時間を変数 t で表し、期別ではなく連続時間モデルを採用する。時刻 t における経済の産出量を $Y(t)$ 、消費を $C(t)$ 、投資を $I(t)$ 、資本と労働の量をそれぞれ $K(t)$ 、 $L(t)$ で表すことにする。産出量 $Y(t)$ は資本量 $K(t)$ と労働量 $L(t)$ に依存し、経済の生産関数は資本と労働と時間の増加関数であるとする。また生産関数は規模に関して収穫不変であり、資本と労働について1次同次の関数であると仮定する。これらの条件を満たす具体的な関数として

$$Y(t) = K(t)^{\alpha(t)} L(t)^{1-\alpha(t)}, \quad (0 < \alpha(t) < 1)$$

を採用する。 $\alpha(t)$ は資本分配率と呼ばれている。通常定数としているが、ここでは時間の関数とする。財市場の均衡条件は

$$C(t) = Y(t) - I(t)$$

であらわされる。投資は資本の増加であり、資本減耗はないと仮定すると、

$$\dot{K}(t) = I(t)$$

が成立する。ここで $\dot{K}(t)$ は $K(t)$ の時間 t に関する微分を表す。また労働量は外生的に決定され、一定の率 $n > 0$ で増加するものとする

$$\dot{L}(t) = nL(t)$$

が成立する。

労働1単位当たりの消費，産出量および資本量をそれぞれ $c(t)$ ， $y(t)$ ， $k(t)$ で表すことにする。すなわち

$$c(t) = \frac{C(t)}{L(t)}, \quad y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)}, \quad k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}, \quad \text{とする。}$$

2番目の式より $y(t) = k(t)^{\alpha(t)}$ を得、3番目の式を時間 t で微分し1番目の式を用いて整理することにより

$$c(t) = k(t)^{\alpha(t)} - nk(t) - \dot{k}(t) \quad (1)$$

次に社会厚生の総和の最大化問題を経済成長の原理として置く事にする^[2]。各時点における社会厚生は1人当たりの消費に依存し、効用関数

$$u = c(t)^{1+e} \quad (-1 < e < 0, \quad e > 0)$$

で表現されると仮定すると、 $t_1 \leq t \leq t_2$ での社会厚生の総和は、

$$\int_{t_1}^{t_2} u dt = \int_{t_1}^{t_2} (k(t)^{\alpha(t)} - nk(t) - \dot{k}(t))^{1+e} dt$$

となる。したがってその最大化問題は次の変分原理と同等である。

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} u dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (k(t)^{\alpha(t)} - nk(t) - \dot{k}(t))^{1+e} dt = 0 \quad (\text{但し } \delta k(t_1) = \delta k(t_2) = 0)$$

これから導かれる次のオイラー・ラグランジュ方程式が、解が満たすべき必要条件である。

$$\frac{\partial u}{\partial k(t)} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial u}{\partial \dot{k}(t)} \right] = 0$$

これを整理すると

$$\dot{c}(t) = -\frac{1}{e} (\alpha(t) k(t)^{\alpha(t)-1} - n) c(t) \quad (2)$$

を得る。

以上において、未知関数3個に対して方程式は2個しかない。そこで、経済の貯蓄率は一定であるとし、その値を s で表すことにする。消費と貯蓄の合計は所得 $Y(t)$ に等しい、すなわち投資と貯蓄は等しいので、 $C(t) = (1-s)Y(t)$ 、これより

$$c(t) = (1-s)k(t)^{\alpha(t)} \quad (3)$$

が成立する。条件(3)を使って方程式(1)、(2)から $c(t)$ および $\dot{c}(t)$ を消去すると、労働1単位当たりの資本量 $k(t)$ と資本分配率 $\alpha(t)$ の時間発展は連立微分方程式

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= sk(t)^{\alpha(t)} - nk(t), \\ \dot{\alpha}(t) &= \{-(s+1/e)\alpha(t)k^{\alpha(t)-1} + n\alpha(t) + n/e\} / \log\{k(t)\} \end{aligned} \quad (4)$$

により決定されることになる。

次に前のモデルに、労働増大的あるいはハロッド中立的と呼ばれる技術進歩を導入しよう。これは、技術進歩の関数を $A(t)$ としたとき、生産関数を

$$Y(t) = K(t)^{\alpha(t)} (A(t)L(t))^{1-\alpha(t)}$$

と書き直すことに相当する^[3]。労働1単位あたりの消費は

$$c(t) = A(t)^{1-\alpha(t)} k(t)^{\alpha(t)} - nk(t) - \dot{k}(t) \quad (5)$$

ここで、前と同様に変分原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} u dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} c(t)^{1+e} dt = 0, \quad (\text{但し } \delta k(t_1) = \delta k(t_2) = 0)$$

より、オイラー・ラグランジュ方程式

$$\dot{c}(t) = -\frac{1}{e} \left(A(t)^{1-\alpha(t)} \alpha(t) k(t)^{\alpha(t)-1} - n \right) c(t) \quad (6)$$

を得る。

前と同様に経済の貯蓄率は一定であるとし、その値を s であるとする、

$$c(t) = (1-s)A(t)^{1-\alpha(t)}k(t)^{\alpha(t)} \quad (7)$$

が成立する。条件 (7) を使って方程式 (5), (6) から $c(t)$ および $\dot{c}(t)$ を消去すると、労働 1 単位当たりの資本量 $k(t)$ と資本分配率 $\alpha(t)$ の時間発展は連立微分方程式

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= sA(t)^{1-\alpha(t)}k(t)^{\alpha(t)} - nk(t), \\ \dot{\alpha}(t) &= \{-(s+1/e)A(t)^{1-\alpha(t)}\alpha(t)k^{\alpha(t)-1} + n\alpha(t) + n/e\} / \log\{k(t)\} \end{aligned} \quad (8)$$

により決定されることになる。

3. モデルの解

まず連立微分方程式 (4) の解を求める。効用関数 u が単調増加な凹関数 ($-1 < e < 0$) の場合は、 $\alpha(t)$ が負になるなどして合理的な解は得られなかった。そこで u は単調増加な凸関数 ($e > 0$) とし、計算を具体的にするために $e = 1$ とする。 $s = 0.3$, $n = 0.01$ として計算した。図 1 にこの解の位相図を示す。この解を (k, c) 平面で書き直したものを図 2 に示す。これを見ると、いかなる労働 1 単位当たりの資本量 $k(t)$ と資本分配率 $\alpha(t)$ および労働 1 単位当たりの消費 $c(t)$ から出発しても、ある定まった経路に入った後、資本分配率が経済の貯蓄率に等しい ($\alpha(t) = s$) 定常状態に収束することがわかる。この経路上では、労働 1 単位当たりの資本量 $k(t)$ が増加すると資本分配率 $\alpha(t)$ と労働 1 単位当たりの消費 $c(t)$ が共に増加する。したがって、この経路を最適な成長経路と呼ぶことができる。

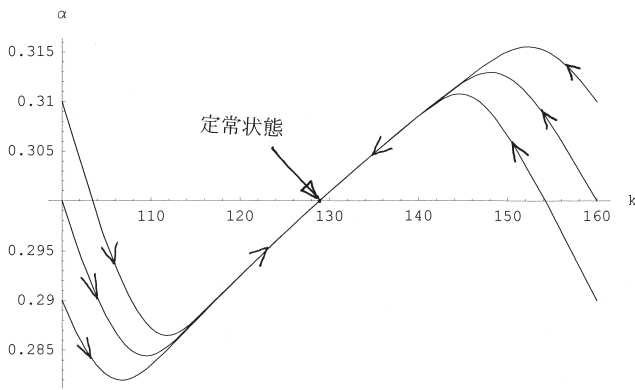


図 1 連立微分方程式 (4) の位相図 (k, α) 平面

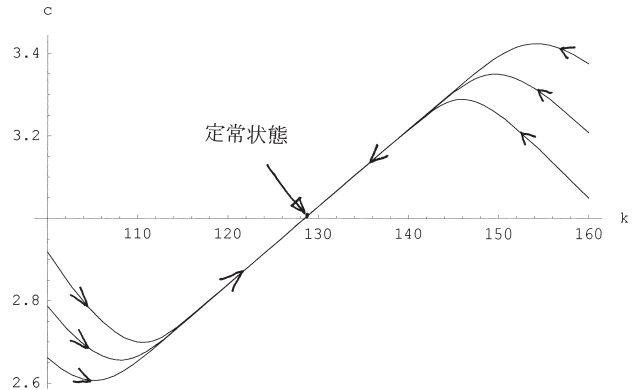
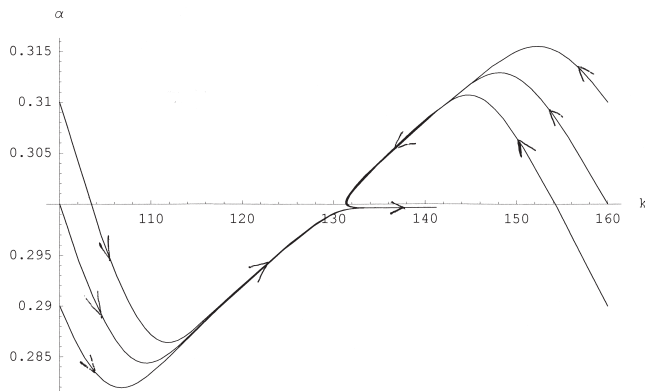
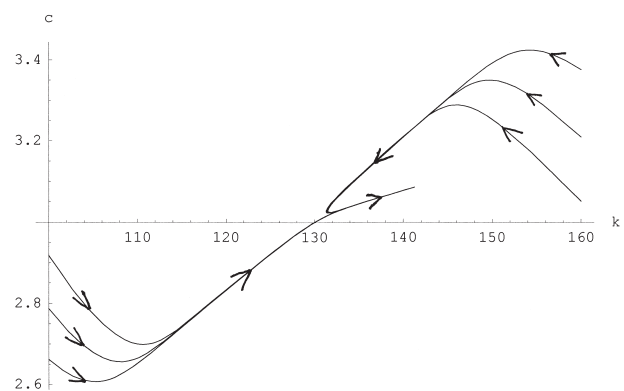


図 2 連立微分方程式 (4) の位相図 (k, c) 平面

次に労働増大的あるいはハロッドの意味で中立的な技術進歩を導入した場合の連立微分方程式 (8) の解を求めよう。前と同様に効用関数 u は単調増加な凸関数 ($e > 0$) とし、 $e = 1$ とする。 $s = 0.3$, $n = 0.01$, $A(t) = 1 + 0.00001t$ として時刻 $t = 0$ より $t = 10000$ まで計算した。図 3 にこの解の位相図を示す。これを見ると定常状態に収束した後、資本分配率 $\alpha(t)$ は一定のまま労働 1 単位当たりの資本量 $k(t)$ は 10% 程増加することが分かる。この解を (k, c) 平面で書き直したものを図 4 に示す。労働 1 単位当たりの消費 $c(t)$ は定常状態に収束した後、労働 1 単位当たりの資本量 $k(t)$ の増加とともに増加する。

図3 連立微分方程式 (8) の位相図 (k, α) 平面図4 連立微分方程式 (8) の位相図 (k, c) 平面

4. 結論

各個人は長期間にわたる社会厚生を最大にするように行動するという原理を置くことによって、経済成長過程における資本分配率 $\alpha(t)$ の時間発展を決定する方程式を導いた。社会厚生は1人当たりの消費に依存し、効用関数で与えられるとした。効用関数が1人当たりの消費の単調増加な凹関数であるとき資本分配率 $\alpha(t)$ が負になるなどして合理的な解は得られなかった。逆に効用関数が1人当たりの消費の単調増加な凸関数であるとき、いかなる労働1単位当たりの資本量 $k(t)$ と資本分配率 $\alpha(t)$ および労働1単位当たりの消費 $c(t)$ から出発しても、 $k(t)$ と $\alpha(t)$ および $c(t)$ が共に増加あるいは減少するある定まった最適経路に入った後、定常状態に収束することがわかった。このモデルにハロッドの意味で中立的な技術進歩を導入すると、定常状態に収束した後、資本分配率 $\alpha(t)$ は一定のまま技術進歩に相当する経済成長が得られた。また労働1単位当たりの消費 $c(t)$ も増加した。

参考文献

- [1] Solow, R. M., A Contribution to the Theory of Economic Growth, Quarterly Journal of Monetary Economics 70, pp65-94, 1956
- [2] 粕野 宏, 貯蓄率が変化する経済成長モデル, 金沢星稜大学論集 第40巻第2号, pp29-34, 2006年
- [3] Uzawa, H., Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium, Review of Economic Studies 28, pp117-124, 1961