技術進歩を含む経済成長モデルのハミルトン形式による定式化

Hamiltonian Formulation for Economic Growth Model including Technical Change

絈　野　　　宏
Hiroshi Kaseno

概要

各個人は効用関数の長期間にわたる積分を最大にするように行動する，という原理を置くことにより経済成長の方程式として，1人当たりの資本と消費を正準共役な変数とするハミルトン方程式が導かれた。技術進歩の時間発展は，理論の外から与えられるのではなくハミルトン方程式の解から求められ，資本・労働・技術進歩が産出量の成長率に及ぼす割合等も理論自体から求められた。

1．はじめに

経済成長理論に関する研究は1950年代末から1960年代にかけて主としてソローによって行われた[1]。ソローは理論の単純化のためにいくつかの仮定をおいた。産出量は資本と労働の投入量の増加関数であり，資本と労働について一次同次であると仮定する。もう一つは産出量（所得）のうちある一定割合が貯蓄されると仮定する。これらの仮定から，1人当たりの資本ストックがいかなる状態から出発しても，長期的には定常状態に収束することを導いた。いったん定常状態に入ると，1人当たりの資本ストックは成長しないが，経済全体の資本ストックは労働成長率と同じ割合で成長する。貯蓄率が増加すると，1人当たりの資本ストックは増加し，1人当たりの生産も増加する。さらに1人当たりの消費が最大となるような定常状態を実現する貯蓄率は資本分配率に等しくなる（これは黄金率と呼ばれている）ことを導いた。

しかしソローモデルにおいて，経済成長に本質的な役割を果たすと考えられる技術進歩は理論の外から与えられるものとして定式化されている。ここでは理論の内部構造自体から技術進歩の関数の時間発展の様子を導出することを目指す。この目的のためにソローの経済成長理論の考えに従いつつ，References ［2］,［3］の考え方を用い，ハミルトン形式の理論を構築した。

2．経済成長の原理

時間を変数 t で表し，期別ではなく連続時間モデルを採用する。時刻 t における経済の産出量を $Y(t)$，消費を $C(t)$，投資を $I(t)$，資本と労働の量をそれぞれ $K(t)$，$L(t)$ で表すことにする。産出量 $Y(t)$ は資本量 $K(t)$ と労働量 $L(t)$ に依存し，経済の生産関数は資本と労働と時間の増加関数であるとする。また生産関数は規模に関して収穫不変であり，資本と労働について1次同次の関数であると仮定する。技術進歩を $A(t)$ とする。これらの条件を満たす具体的な関数として

$$Y(t) = A(t)\,K(t)^{\alpha}\,L(t)^{1-\alpha},\quad (0 < \alpha < 1) \tag{1}$$

を採用する。 α は資本分配率と呼ばれている。財市場の均衡条件は

$$C(t) = Y(t) - I(t)$$

であらわされる。投資は資本の増加であり，資本減耗はないと仮定すると，

$$\dot{K}(t) = I(t)$$

が成立する。ここで $\dot{K}(t)$ は $K(t)$ の時間 t に関する微分を表す。また労働量は外生的に決定され，一定の率 $n > 0$ で増加するものとすると

$$\dot{L}(t) = nL(t) \tag{2}$$

が成立する。

労働1単位当たりの消費，産出量および資本量をそれぞれ $c(t)$，$y(t)$，$k(t)$ で表すことにする。

すなわち $c(t) = \dfrac{C(t)}{L(t)}$，　$y(t) = \dfrac{Y(t)}{L(t)}$，　$k(t) = \dfrac{K(t)}{L(t)}$　とする。2番目の式より $y(t) = A(t)\,k(t)^{\alpha}$ を得，3番目の式を時間 t で微分し1番目の式を用いて整理することにより

$$c(t) = A(t)\,k(t)^{\alpha} - nk(t) - \dot{k}(t) \tag{3}$$

経済の貯蓄率は一定であるとし，その値を s で表すことにする。消費と貯蓄の合計は所得 $Y(t)$ に等しい，すなわち投資と貯蓄は等しいので，$C(t) = (1-s)Y(t)$，これより

$$c(t) = (1-s)A(t)\,k(t)^{\alpha} \tag{4}$$

が成立する。これにより（3）式より $A(t)$ を消去すると，

$$c(t) = \frac{1}{g}(nk(t) + \dot{k}(t))\text{，（但し、}g = \frac{s}{1-s}\text{）} \tag{5}$$

となる。また，1 人当たりの産出量 $y(t)$ は $y(t) = \dfrac{1}{1-s}c(t)$ と書け，1 人当たりの消費 $c(t)$ が増加すれば増加する。

次に社会厚生の総和の最大化問題を経済成長の原理として置く事にする [2]。各時点における社会厚生は 1 人当たりの消費に依存し，効用関数

$$u = \frac{g}{2}c(t)^2,$$

で表現されると仮定すると，$t_1 \le t \le t_2$ での社会厚生の総和は，

$$\int_{t_1}^{t_2} u\,dt = \frac{g}{2}\int_{t_1}^{t_2}(nk(t) + \dot{k}(t))^2 dt$$

となる。したがってその最大化問題は次の変分原理と同等である。

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} u\,dt = \delta\frac{g}{2}\int_{t_1}^{t_2}(nk(t) + \dot{k}(t))^2 dt = 0\text{（但し}\delta k(t_1) = \delta k(t_2) = 0\text{）} \tag{6}$$

これから導かれる次のオイラー・ラグランジュ方程式が，解が満たすべき必要条件である。

$$\frac{\partial u}{\partial k(t)} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial u}{\partial \dot{k}(t)}\right] = 0$$

これを整理して

$$\dot{c}(t) = nc(t) \tag{7}$$

を得る。以上のことから，労働 1 単位当たりの資本量 $k(t)$ と消費 $c(t)$ の時間発展は連立微分方程式（5），（7）により決定され，さらに式（4）により，技術進歩 $A(t)$ の時間発展が決定される。

次の式によってハミルトニアン H を定義しよう。

$$H(c,k) = c\dot{k}(t) - u = \frac{g}{2}c(t)^2 - nc(t)k(t) \tag{8}$$

そうすると，ハミルトン方程式は

$$\dot{k}(t) = \frac{\partial H}{\partial c} = gc(t) - nk(t), \qquad \dot{c}(t) = -\frac{\partial H}{\partial k} = nc(t) \tag{9}$$

と書け，方程式（5），（7）と同じものが得られる。また $\dfrac{dH}{dt} = 0$，すなわちハミルトニアン H は時間に関して一定となっている。

次に，資本，労働，技術進歩が産出量の成長率に及ぼす割合を表す式を導こう。産出量の成長率を $\Delta Y/Y$，資本の成長率を $\Delta K/K$，労働の成長率を $\Delta L/L$，技術進歩率を $\Delta A/A$ とすると，（1）式より

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \alpha\frac{\Delta K}{K} + (1-\alpha)\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta A}{A} \tag{10}$$

が成立する。

3. ハミルトン方程式の解

まずハミルトン方程式（9）の解を求める。$s = 0.3$，$n = 0.01$，　$\alpha = 0.3$ として計算した。図 1，図 2，図 3 にこの解の位相図を示す。これを見ると 1 人当たりの消費は常に増加すること，技術進歩は消費に牽引されて常に増大することが分かる。また，十分時間が経てば，初期状態にほとんど依らず時間のみで決まる状態となる。

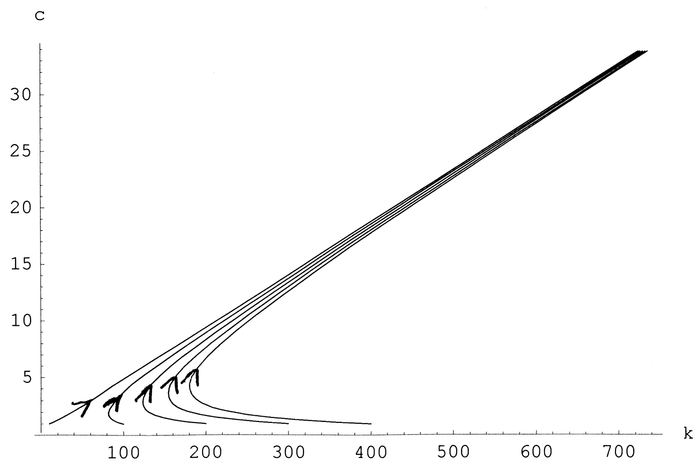

図 1　ハミルトン方程式（9）の位相図　(k, c) 平面

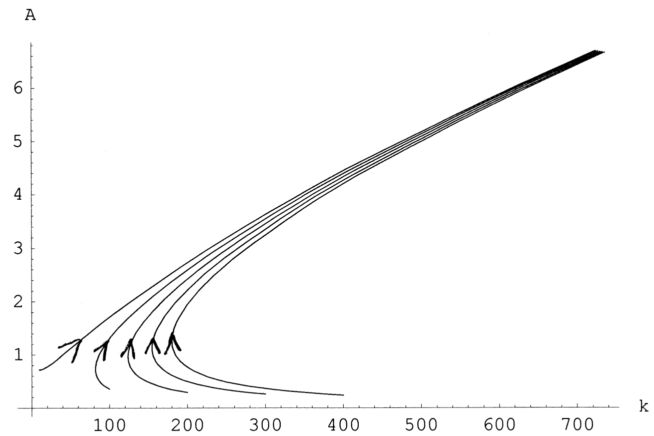

図 2　ハミルトン方程式（9）の位相図　(k, A) 平面

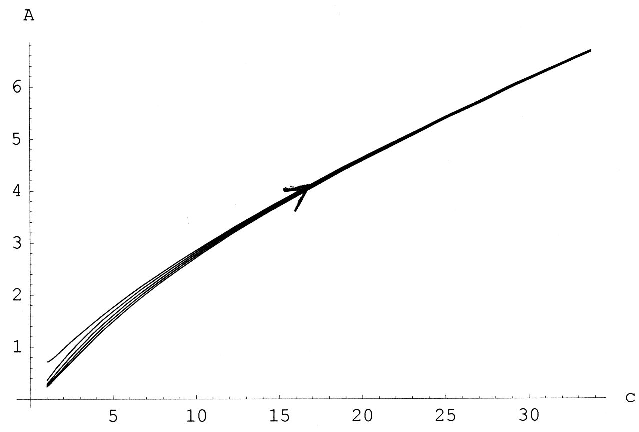

図 3　ハミルトン方程式（9）の位相図　(c, A) 平面

次に，これらの解を使って産出量の成長率　$\Delta Y/Y$，資本の成長率　$\Delta K/K$，労働の成長率　$\Delta L/L$，技術進歩率　$\Delta A/A$ を計算してみよう。初期条件 $k(0)=200$，$c(0)=1$ のもので，時刻 $t=0 \to t=1$，$t=100 \to t=101$，$t=200 \to t=201$，$t=300 \to t=301$，の4つの場合について計算した結果をまとめたものが以下の表である。産出量の成長率は一定であるが（ここでは簡単のため経済の貯蓄率が一定という仮定を置いている），資本の成長率は時間とともに増加し，技術進歩率は時間とともに減少する。時間が十分たてば，3つの要素成長率はほぼ同じ程度になる。

t	0→1	100→101	200→201	300→301
ΔY/Y	2.00	2.00	2.00	2.00
αΔK/K	0.06	0.28	0.52	0.59
(1−α)ΔL/L	0.70	0.70	0.70	0.70
ΔA/A	1.24	1.02	0.78	0.71

表　成長率（%）（$\alpha=0.3$）

4．結論

各個人は長期間にわたる社会厚生の総和を最大にするように行動するという原理を置くことによって，技術進歩を含む経済成長モデルを構築した。社会厚生は1人当たりの消費に依存し，効用関数で与えられるとした。効用関数が1人当たりの消費の2次関数であるとき，1人当たりの資本と消費が正準共役な変数となり，その時間発展はハミルトン方程式によって決定された。さらに，技術進歩は理論の外から与えられるのではなく，1人当たりの資本と消費から求められた。また，経済の貯蓄率が一定等の仮定のもとで，産出量の成長率は一定であるという結果が得られた。

References

[1] Solow, R. M., A Contribution to the Theory of Economic Growth, Quarterly Journal of Monetary Economics 70, pp65-94, 1956
[2] 絈野　宏，貯蓄率が変化しうる経済成長モデル，金沢星稜大学論集 第40巻第2号，pp29-34，2006年
[3] 絈野　宏，経済成長過程における資本分配率の時間発展， 金沢星稜大学論集 第41巻第1号，pp13-16，2007年