技術進歩を含む経済成長モデルにおける財政政策の効果

Effects of Fiscal Policy in Economic Growth Model including Technical Change

綛　野　　宏
Hiroshi Kaseno

概　要

各個人は社会厚生の総和を最大にするように行動する，という原理を置くことにより経済成長の方程式として，１人当たりの資本量と消費を正準共役な変数とするハミルトン方程式が導かれた。これを政府の財政政策がある場合に拡張すると，政府支出は1人当たりの資本量や消費に何の影響も与えないが，１人当たりの産出量や技術進歩（生産のための資本と労働以外の要素をひっくるめて表したもの）を短期的に増加させる（長期的には効果がないが）という結果が得られた。

目　次

１．はじめに

経済成長理論に関する研究は1950年代末から1960年代にかけて主としてソローによって行われた [1]。ソローは理論の単純化のためにいくつかの仮定をおいた。産出量は資本と労働の投入量の増加関数であり，資本と労働について一次同次であると仮定する。もう一つは産出量（所得）のうちある一定割合が貯蓄されると仮定する。これらの仮定から，１人当たりの資本ストックがいかなる状態から出発しても，長期的には定常状態に収束することを導いた。いったん定常状態に入ると，１人当たりの資本ストックは成長しないが，経済全体の資本ストックは労働成長率と同じ割合で成長する。貯蓄率が増加すると，１人当たりの資本ストックは増加し，１人当たりの生産も増加する。さらに１人当たりの消費が最大となるような定常状態を実現する貯蓄率は資本分配率に等しくなる（これは黄金率と呼ばれている）ことを導いた。

しかしソローモデルにおいて，経済成長に本質的な役割を果たすと考えられる技術進歩は理論の外から与えられるものとして定式化されている。そこで Reference [4] においてはソローの経済成長理論の考えに従いつつ，References [2], [3] の考え方を用いてハミルトン形式の理論を構築し，理論の内部構造自体から技術進歩の関数の時間発展の様子を導出した。本論文では，Reference [4] を財政政策を含むものに拡張する。

２．財政政策を含む経済成長モデルの構築

時間を変数 t で表し，期別ではなく連続時間モデルを採用する。時刻 t における経済の産出量を $Y(t)$，消費を $C(t)$，投資を $I(t)$，政府支出を $G(t)$，資本と労働の量をそれぞれ $K(t)$, $L(t)$ で表すことにする。産出量 $Y(t)$ は資本量 $K(t)$ と労働量 $L(t)$ に依存し，経済の生産関数は資本量と労働量と時間の増加関数であるとする。また生産関数は規模に関して収穫不変であり，資本量と労働量について１次同次の関数であると仮定する。技術進歩を $A(t)$ とする。これらの条件を満たす具体的な関数として

$$Y(t) = A(t)K(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha}, (0 < \alpha < 1) \tag{1}$$

を採用する。α は　資本分配率と呼ばれている。財市場の均衡条件は

$$C(t) = Y(t) - I(t) - G(t) \tag{2}$$

であらわされる。投資は資本の増加であり，資本減耗はないと仮定すると，

$$\dot{K}(t) = I(t) \tag{3}$$

が成立する。ここで $\dot{K}(t)$ は $K(t)$ の時間 t に関する微分を表す。また労働量は外生的に決定され，一定の率 $n > 0$ で増加するものとすると

$$\dot{L}(t) = nL(t) \tag{4}$$

が成立する。

労働量 1 単位当たりの消費，産出量，資本量および政府支出をそれぞれ $c(t), y(t), k(t), g(t)$ で表すことにする。すなわち $c(t) = \dfrac{C(t)}{L(t)}$， $y(t) = \dfrac{Y(t)}{L(t)}$， $k(t) = \dfrac{K(t)}{L(t)}$， $g(t) = \dfrac{G(t)}{L(t)}$ とする。２番目の式より $y(t) = A(t)k(t)^{\alpha}$ を得，３番目の式を時間 t で微分し１番目と４番目の式を用いて整理することにより

$$c(t) = A(t)k(t)^{\alpha} - g(t) - nk(t) - \dot{k}(t) \tag{5}$$

経済の貯蓄率は一定であるとし，その値を s で表すことにする。消費と貯蓄の合計は所得 $Y(t)$ に等しい，すなわち投資と貯蓄は等しいので，$C(t) = (1-s)(Y(t) - G(t))$，これより

$$c(t) = (1-s)(A(t)k(t)^{\alpha} - g(t)) \tag{6}$$

が成立する。これと（5）式より $A(t)$ を消去すると，

$$c(t) = \frac{1}{r}(nk(t) + \dot{k}(t)),\ （但し，r = \frac{s}{1-s}） \tag{7}$$

となる。また，１人当たりの産出量 $y(t)$ は $y(t) = \dfrac{1}{1-s}c(t) + g(t)$ と書ける。

次に社会厚生の総和の最大化問題を経済成長の原理として置く事にする [2]。各時点における社会厚生は1人当たりの消費に依存し，効用関数 $u = \dfrac{r}{2}c_0(t)^2$，（β を利子率とすると $c_0 = ce^{-\beta t}$ は c の割引現在価値である）で表現されると仮定すると，$t_1 \le t \le t_2$ での社会厚生の総和は，

$$\int_{t_1}^{t_2} u\,dt = \frac{r}{2}\int_{t_1}^{t_2} c_0(t)^2 dt \tag{8}$$

となる。但し

$$c_0(t) = \frac{1}{r}(nk_0(t) + \beta k_0(t) + \dot{k}_0(t)) \tag{9}$$

ここで $k_0 = ke^{-\beta t}$ は k の割引現在価値である。
したがってその最大化問題は次の変分原理と同等である。

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} u\,dt = 0\ （但し\ \delta k_0(t_1) = \delta k_0(t_2) = 0） \tag{10}$$

これから導かれる次のオイラー・ラグランジュ方程式が，解が満たすべき必要条件である。

$$\frac{\partial u}{\partial k_0(t)} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial u}{\partial \dot{k}_0(t)}\right] = 0 \tag{11}$$

これを整理して

$$\dot{c}_0(t) = (n+\beta)c_0(t) \tag{12}$$

を得る。以上のことから，労働１単位当たりの資本量の割引現在価値 $k_0(t)$ と消費の割引現在価値 $c_0(t)$ の時間発展は連立微分方程式（9），（12）により決定される。

次の式によってハミルトニアン H を定義しよう。

$$H(c_0, k_0) = c_0(t)\dot{k}_0(t) - u = \frac{r}{2}c_0(t)^2 - (n+\beta)c_0(t)k_0(t) \tag{13}$$

そうすると，ハミルトン方程式は

$$\dot{k}_0(t)=\frac{\partial H}{\partial c_0(t)}=rc_0(t)-(n+\beta)k_0(t),\quad \dot{c}_0(t)=-\frac{\partial H}{\partial k_0(t)}=(n+\beta)c_0(t) \tag{14}$$

と書け，方程式（9），（12）と同じものが得られる。また $\frac{dH}{dt}=0$，すなわちハミルトニアン H は時間に関して一定となっている。

１人当たりの産出量の割引現在価値（ $y_0=ye^{-\beta t}$ ）と技術進歩の関数は，ハミルトン方程式を解いた後それぞれ以下の式で求められる。

$$y_0(t)=\frac{1}{1-s}c_0(t)+g(t)e^{-\beta t} \tag{15}$$

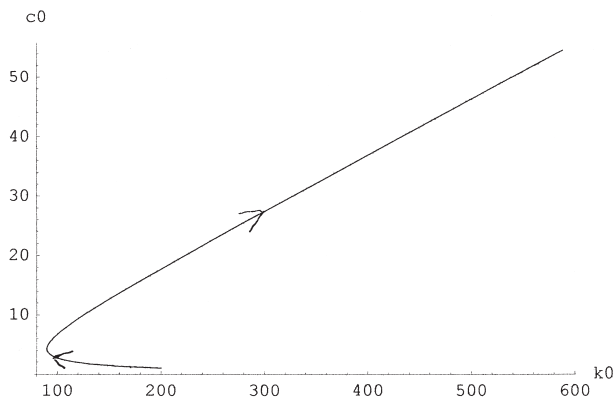
$$A(t)=\frac{y_0(t)}{k_0(t)^{\alpha}}e^{\beta(1-\alpha)t} \tag{16}$$

３．モデルの解

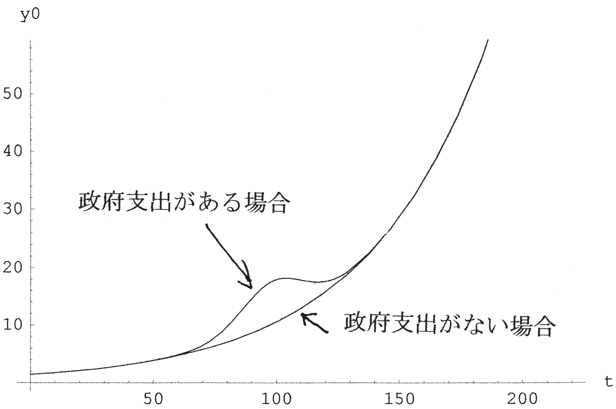
まずハミルトン方程式（14）の解を求める。s=0.3, n=0.01, □=0.3, □=0.01 とし，$k_0(t)$, $c_0(t)$ の初期値をそれぞれ200，1として計算した。また，労働１単位当りの政府支出を $g(t)=20e^{-0.003(t-100)^2}$ とした。

図１にこの解の位相図を示す。ハミルトン方程式には政府支出の関数が入っていないことから分かるように，政府支出は１人あたりの資本量や消費に何の影響も与えない。図２，図３に１人当たりの産出量の割引現在価値と技術進歩（生産のための資本と労働以外の要素）の関数の時間変化を示す。これを見ると１人当たりの産出量は政府支出によって短期的に著しく増加するが，長期的には効果がないことがわかる。技術進歩の関数も同様であり，政府支出によって短期的に著しく増加するが長期的には効果がない。

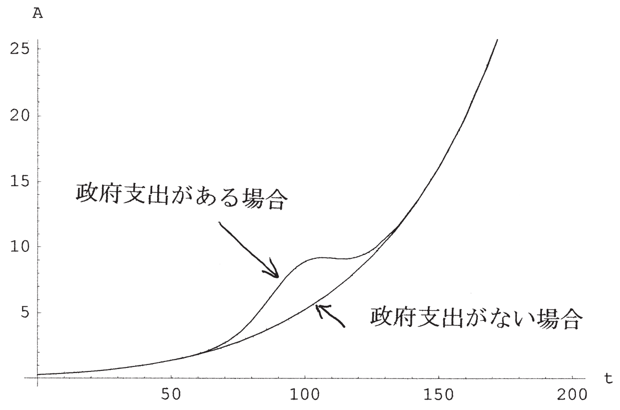
利子率が大きくなると，１人当たり産出量の割引現在価値の増加の度合いは増大するが，政府支出の効果は減少する。



図−1　ハミルトン方程式（14）の解　(k_0,c_0) 平面



図−2　1人あたり産出量の割引現在価値 y_0 の時間変化



図−3　技術進歩の関数 A の時間変化

4．結　　論

各個人は長期間にわたる社会厚生の総和を最大にするように行動するという原理を置くことによって，技術進歩を含む経済成長モデルを構築した。社会厚生は1人当たりの消費に依存し，効用関数で与えられるとした。効用関数が１人当たりの消費の２次関数であるとき，１人当たりの資本量と消費が正準共役な変数となり，その時間発展はハミルトン方程式によって決定された。これを政府の財政政策がある場合に拡張すると，政府支出は１人当たりの資本量や消費に何の影響も与えないが，１人当たりの産出量や技術進歩（生産のための資本と労働以外の要素をひっくるめて表したもの）を短期的に増加させる（長期的には効果がないが）という結果が得られた。

《References》

[1] Solow, R. M. , A Contribution to the Theory of Economic Growth, *Quarterly Journal of Monetary Economics* 70, pp65-94, 1956
[2] 絈野　宏 ,「貯蓄率が変化しうる経済成長モデル」,『金沢星稜大学論集』第40巻第2号 , pp29-34, 2006年
[3] 絈野　宏 ,「経済成長過程における資本分配率の時間発展」,『金沢星稜大学論集』第41巻第1号 , pp13-16 , 2007年
[4] 絈野　宏 ,「技術進歩を含む経済成長モデルのハミルトン形式による定式化」,『金沢星稜大学論集』第42巻第2号 , pp15-18 , 2008年