正の名目金利と整合的な最適貨幣量

The Optimal Quantity of Money Consistent with Positive Nominal Interest Rates

原　嶋　耐　治
Taiji Harashima

要　　約

名目金利をゼロとすることが最適であるというフリードマン・ルールは，それが実際には殆ど観測されないにもかかわらず，どのようにモデルを修正しても殆ど常に成立する。しかし，フリードマン・ルールは，暗黙的に，政府は代表的家計の支配下にあるという前提に基づいている。本論文では，仮に政府が代表的家計の支配下になく，純粋に自己の政治的目的を追求する存在であるならば，最適貨幣量は，一般に，正の名目金利とインフレ率を伴うことを示す。

1　はじめに

有名なフリードマン・ルールは，最適な貨幣量を実現するためには，名目金利をゼロとし，インフレ率が負となることを求める（Friedman,1969）。いうまでもなく，現実には，殆どの時期に殆どの国で名目金利とインフレ率は正であった。非常に高い名目金利やインフレ率が観察されることも稀な現象ではなかった。さらにいえば，インフレ率は ２％程度であることが「望ましい」という認識も，広く共有されているように思える。２％のインフレ率は，仮に実質金利が ３％であるとすると，５％の名目金利を意味する。こうした値が「望ましい」と広く考えられていることは，最適通貨量は，実際にはフリードマン・ルールが示すようなものではない可能性を示唆する。

しかし，理論的には，フリードマン・ルールは，どのようにモデルを修正しても，殆ど常に成り立つ。これに対し，Phelps（1973）は，もし　歪みをもたらす税（distortionary taxes）が導入されるなら，フリードマン・ルールが常に最適であるとは限らないことを指摘した。Phelps（1973）以降，多くの経済学者がこの可能性を追求したが，現在では，歪みをもたらす税の効果の大きさは，数量的にみてフリードマン・ルールを否定する程の大きさは持たないと考えられている（例えば，Chari et al., 1996; Mulligan and Sala-i-Martin, 1997）。一方，経済学者の中には，緩やかな正のインフレ率は，ショックにより変動が起きる確率的な環境下では利点を有すると主張する学者もいる（例えば，Akerlof et al., 2000）。もし，こうした利点が実際に存在するならば，フリードマン・ルールは必ずしも望ましくないかもしれない。これに対し，こうした議論はそもそも家計の合理的行動と整合的ではないという批判がある。結果として，多くの経済学者は，フリードマン・ルールは近似的に成立していると考えている。しかし，理論的には最適なフリードマン・ルールが，現実には，どの国でもどの時期でも殆ど観察されないのは何故かという疑問は依然として残されている。

一方，物価水準の財政理論（FTPL）は，フリードマン・ルールの基礎となっている貨幣数量説の解釈に疑問を投げかけている（例えば，Leeper, 1991; Sims, 1994, 1998; Woodford, 2001; Cochrane, 2005）。FTPL に懐疑的な経済学者も少なくないが，FTPL は，フリードマン・ルールが現実には観察されない理由を考える際の有力なヒントを与えてくれる。FTPL の中心的な考えは，政府は必ずしも家計の効用を念頭において行動していないという点にある。この考え方は，もし政府が家計とは独立に独自の目的を有し，それに従って行動しているならば，フリードマン・ルールは必ずしも最適とはならない可能性があることを意味する。

フリードマン・ルールでは，FTPLとは異なり，政府は代表的家計の効用の最大化のみを考慮して行動することが想定されている。政府は代表的家計の完全な支配下にあることから，政府独自の政治的目的は存在しない。したがって，フリードマン・ルールでは，代表的家計は，貨幣の需要者であると同時に実質的に供給者でもあることになる。この環境下では，貨幣は代表的家計の需要の飽和点まで供給されることが最適となる。このことは，政府が代表的家計から独立し独自の意志を有すると仮定しない限り，フリードマン・ルールは必ず成立することを意味する。ここで，前述の Phelps（1973）

の歪みをもたらす税の議論は，政府が代表的家計とは独立した主体であることの一例である。政府は，代表的家計の行動に歪みをもたらしても，あえて税を導入するからである。非同一な家計の存在も，政府が代表的家計とは独立した主体である場合の一例である。政府は，ある一つのタイプの家計のみの支配下に置かれるからである。

上記の議論を敷衍すれば，政府が代表的家計から独立した主体である場合には，正の名目金利とインフレ率が存在する可能性があることになる。さらにいえば，現実の世界においては，Phelps（1973）が指摘した歪みをもたらす税の導入という限定された政策にとどまらず，広く政策全般にわたって政府は独立した主体として行動しているのかもしれない。したがって，フリードマン・ルールの是非を判断するためには，より幅広く，そもそも政府はどのような目的に従って行動しているかという点を詳細に分析した上で，そこで明らかになった行動様式を明示的にモデルに組み込むことが重要であろう。

本論文においては，代表的家計から独立して行動する政府を想定し，その政府の行動を明示的にモデルに組み込んだ。そのモデルによると，最適貨幣量において，一般に正の名目金利とインフレ率となる。この結論は，フリードマン・ルールとは全く異なるものであるが，現実に観察されるデータに照らし合わせると極めて自然な結果である。

本論文の構成は以下の通りである。次の第２節で，代表的家計とは独立したリバイアサン政府を仮定したモデルを構築する。第３節で，代表的家計と政府が同時にその目的関数を最大化した場合を考察し，その結果としての物価変動の法則を示す。第４節では，政府と家計の同時最適化の結果として，一般に，最適貨幣量は正の名目金利とインフレ率を伴うことを示す。最後に，第５節で結論を記す。

２　モデル [1]

２．１　政府の予算制約

政府の予算制約式は，以下の通りである。[2]

$$\dot{B}_t = B_t R_t + G_t - X_t - S_t$$

ここで，B_t は名目国債残高，R_t は国債の名目金利，G_t は名目政府支出，X_t は名目税収額，S_t はシニョリッジの名目額であり，それぞれ時間 t における値である。税は，一括税である。また，全て一人当たりの値である。投資家は，国債の金利を，一定期間後においてのみ，例えば１年後に，得ることができる。国債は，一定期間後償還されるが継続的に再発行される。R_t は，実質金利 r_t と期待インフレ率 $\pi^e_{b,t}$ により構成されている。すなわち，$R_t = r_t + \pi^e_{b,t}$ である。ここで，$b_t = \frac{B_t}{p_t}$，$g_t = \frac{G_t}{p_t}$，$x_t = \frac{X_t}{p_t}$，さらに $s_t = \frac{S_t}{p_t}$ で，p_t は時間 t における物価水準である。さらに，$\pi_t = \frac{\dot{p}_t}{p_t}$ は，時間 t におけるインフレ率である。政府の予算制約式は，p_t で割ることにより以下のようになる。

$$\frac{\dot{B}_t}{p_t} = b_t R_t + g_t - x_t - s_t$$

これは，次の式と同値である。

$$\dot{b}_t = b_t R_t + g_t - x_t - s_t - b_t \pi_t = b_t (R_t - \pi_t) + g_t - x_t - s_t$$

国債の金利は一定期間後においてのみ得ることができるので，投資家は，もし $\overline{R}_t \geq E_t \int_t^{t+1} (\pi_s + r_s) ds$ ならば，時間 t に，国債を購入する。ここで，$\overline{R}_t$ は，時間 t に購入された国債の名目金利である。したがって，市場における裁定により，$\overline{R}_t = E_t \int_t^{t+1} (\pi_s + r_s) ds$，そして，もし r_t が一定（つまり，定常状態にある）ならば $\overline{R}_t = E_t \int_t^{t+1} \pi_s \, ds + r_t$ となる。この式は，時間 t と $t + dt$ の間の十分に短い期間に政府が国債の金利支払いのために負う債務が，$dt\,\pi_t$ ではなく $dt\,E_t \int_t^{t+1} \pi_s \, ds$ で増加することを意味する。

1　本モデルは、Harashima (2004) を基にしている。
2　単純化のために、本論文では、中央銀行は政府から独立していないと仮定する。したがって、ここにおける政府は、中央銀行の機能をも含んだ機関である。

ここで，$\overline{B}_{t,t+1}$ を，時間 t に発行される国債の時間 $t+1$ における価値だとすると，$\overline{B}_{t,t+1}-\overline{B}_{t,t}=\overline{R}_t\overline{B}_{t,t}=\left(E_t\int_t^{t+1}\pi_s\,ds+r_t\right)\overline{B}_{t,t}$ なので，$\dot{\overline{B}}_{t,t}=\left(E_t\int_t^{t+1}\pi_s\,ds+r_t\right)\overline{B}_{t,t}$ ということになる。もし π_t が一定なら，$\dot{\overline{B}}_{t,t}=\left(E_t\int_t^{t+1}\pi_s\,ds+r_t\right)\overline{B}_{t,t}\Leftrightarrow\dot{\overline{B}}_{t,t}=(\pi_t+r_t)\overline{B}_{t,t}$ であるが，もし π_t が一定でないなら，この同値関係は成り立たない。

国債は単位期間後に償還されるものの，継続的に再発行されるので，政府の時間 t における国債残高は，時間 t - 1 と時間 t の間に発行された国債からなる。したがって，完全予見の仮定の下では，時間 t において政府が発行している国債全体に対する平均名目金利は，$\overline{R}_t$ の加重平均，すなわち，

$$R_t=\int_{t-1}^{t}\overline{R}_s\left(\frac{\overline{B}_{s,t}}{\int_{t-1}^{t}\overline{B}_{v,t}\,dv}\right)ds=\int_{t-1}^{t}\int_s^{s+1}\pi_v\,dv\left(\frac{\overline{B}_{s,t}}{\int_{t-1}^{t}\overline{B}_{v,t}\,dv}\right)ds+r_t$$

となる。もし，時間 t - 1 と時間 t の間の加重 $\dfrac{\overline{B}_{s,t}}{\int_{t-1}^{t}\overline{B}_{v,t}\,dv}$ が相互にそれ程大きく相違しないのであれば，近似的に，

$$R_t=\int_{t-1}^{t}\int_s^{s+1}\pi_v\,dv\ \ ds+r_t$$

となる。したがって，政府が発行している国債の平均名目金利は，近似的に，$R_t=\int_{t-1}^{t}\int_s^{s+1}\pi_v\,dv\ \ ds+r_t$ に従って変化する。ここで，もし，ある定数 $w\,(0\le w\le 1)$ に対し，いかなる時間 t においても，近似的に $\int_t^{t+1}\pi_s\,ds=\pi_{t+w}$ ならば（すなわち，もし，いかなる時間 t においても，$\int_t^{t+1}\pi_s\,ds$ は，π_{t+w} とみなすことができるならば），

$$R_t=\int_{t-1}^{t}\int_s^{s+1}\pi_v\,dv\,ds+r_t=\int_{t-1+w}^{t+w}\pi_s\,ds+r_t$$

となる。すなわち，$\pi^e_{b,t}$ は，近似的に，単位期間内におけるインフレによる物価水準の変化を意味する。もし，π_t が一定ならば，$\pi^e_{b,t}=\int_{t-1}^{t}\int_s^{s+1}\pi_v\,dv\,ds=\pi_t$ である。しかし，もし，π_t が一定でないならば，$\pi^e_{b,t}=\pi_t$ とは必ずしもならない。つまり，$\pi^e_{b,t}=\pi_t$ は，$\pi^e_{b,t}$ の特殊例にすぎないといえる。

２．２　経済的にリバイアサンである政府

本モデルにおいては，政府は経済的にリバイアサンであると仮定される。良く知られているように，政治経済学の分野では，政府の行動に関する全く異なる二つの見方が提唱されている。すなわち，リバイアサン観（the Leviathan view）と博愛政府観（the benevolent view）である（例えば，Downs, 1957; Brennan and Buchanan, 1980; Alesina and Cukierman, 1990 を参照のこと）。リバイアサン観では，政府はその政治的目的の追及を優先させると考える。一方，博愛政府観では，政府は代表的家計と同じ目的を追求すると考える。

経済的観点からみると，博愛政府は，代表的家計の期待効用を最大化しようとするが，リバイアサン政府は，そのようなことはしない。つまり，代表的家計の意向を完全に，そして機械的に反映させるように努める博愛政府と異なり，リバイアサン政府は，何としても自身の政治的目的を達成しようとする強い意志を持った政治家によって運営されているといえる。博愛政府にとっては，政府支出は代表的家計の効用を最大化するための道具であるが，リバイアサン政府にとっては，政府自身の政治的目的を実現するための道具である。

しかし，このようなリバイアサン政府が，長期にわたって政権の座に座り続けることはできるであろうか？経済と政治の両面を考慮すれば，それは可能である。国民は政治と経済の両方の観点から政府を選ぶので，リバイアサン政府が代表的家計の経済的利害のみを考慮していないと分かっていても，リバイアサン政府を選ぶことは十分にあり得る。一人一票の選挙制度では，一般に中位投票者の選好に基づいて政府は選ばれるが，経済学における代表的家計は，基本的に政治的に「中位」の家計ではなく，経済的に「平均」の家計である。[3]「中位」と「平均」は，多くの分布において必ずしも一致

3　中位投票者定理に関する文献、例えば、Downs (1957) を参照のこと。

しない。通常，所得の分布は左右対称ではないので，経済学における代表的家計は，政治的に中位の家計と通常一致しない。つまり，リバイアサン政府は，政治的に中位の家計の政治的な意向に従い，一方，博愛政府は，経済的に平均的な代表的家計の意向に従い，通常両者の嗜好は一致しないと考えることもできる。

リバイアサン観の場合，一般に，政府の目的関数の要素として，明示的に政府支出や税などが含められる（例えば，Edwards and Keen, 1996)。リバイアサン政府は，その政治的目的を実現するための政府支出を行うことにより，政治的な効用を得る。したがって，政府支出の額が大きいほど，リバイアサン政府はより満足し，高い効用を得るであろう。一方で，リバイアサン政府は，増税が国民の反感を買い，再選の可能性を低下させることも十分分かっている。再選されないことは，自身の政治目的のために政府支出を使うことができなくなるため，リバイアサン政府にとっては避けたい，不効用をもたらす事態である。したがって，リバイアサン政府は，課税を自らの政治目的を達成するためにやむを得ず実施する必要悪なコストであると認識するであろう。このように考えると，政府支出と課税は，家計の効用関数における消費と労働時間の関係に類似しているといえる。消費と労働時間がともに制御変数であるのと同様に，リバイアサン政府の支出と税収も制御変数である。

以上の考察から，リバイアサン政府の政治的効用関数は，$u_G(g_t, x_t)$ と表現できる。さらに，$\frac{\partial u_G}{\partial g_t} > 0$ 及び $\frac{\partial^2 u_G}{\partial g_t^2} < 0$，並びに $\frac{\partial u_G}{\partial x_t} < 0$ 及び $\frac{\partial^2 u_G}{\partial x_t^2} > 0$ と仮定することができる。最適化行動の観点からみると，リバイアサン政府は，自身の時間選好率で割り引いた期待効用の総和を最大化するように行動するであろう。ただし，その最大化行動には，財政赤字に関する制約条件が課される。

2．3　最適化問題

2．3．1　代表的家計

代表的家計の効用関数としては，有名な Sidrauski (1967) の Money in the utility model を用いる。代表的家計は，以下の制約条件

$$\dot{a}_t = (r_t a_t + w_t + z_t) - [c_t + (\pi_t + r_t) m_t] - g_t$$

の下で，以下のように期待効用を最大化する。

$$Max \ \ E_0 \int_0^{\infty} u_P(c_t, m_t) \exp(-\theta_P t) dt$$

ここで，u_P と θ_P は，代表的家計の効用関数と時間選好率であり，c_t は実質消費，m_t は実質貨幣量，w_t は実質賃金，z_t は実質政府一括所得移転，さらに，$a_t = k_t + m_t$ であり，k_t は実質資本量である。全ての変数は，一人当たりの値である。さらに，$r_t = f'(k_t)$，$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t)$，$u_P' > 0$，$u_P'' < 0$，$\frac{\partial u_P(c_t, m_t)}{\partial m_t} > 0$，そして $\frac{\partial^2 u_P(c_t, m_t)}{\partial m^2} < 0$ であると仮定する。なお，$f(\cdot)$ は，生産関数である。人口は一定と仮定する。予算制約は，各期における生産 $f(k_t)$ が，民間部門の消費 c_t，民間部門の投資 $\dot{k}_t$ 及び政府支出 g_t によって需要されることを意味している。政府がリバイアサンであることから，政府支出 g_t は，代表的家計にとって外生変数である。均衡において，全ての家計は，その貨幣保有量とは独立に，所与のものとして政府からの所得移転を受け取る。

2．3．2　リバイアサン政府

リバイアサン政府は，相対的危険回避度一定の効用関数 u_G を持つと仮定する。また，その時間選好率は θ_G である。この政府の最適化問題は，制約条件

$$\dot{b}_t = b_t(R_t - \pi_t) + g_t - x_t - s_t$$

の下で，以下のように期待効用を最大化するものである。

$$Max\ \ E_0\int_0^{\infty} u_G(g_t,x_t)\exp(-\theta_G t)dt$$

注意すべきは，政府は，その期待効用の最大化に際し，その予算制約式に含まれる R_t に反映される代表的家計の行動を十分に考慮していることである。

なお，政府の時間選好率 θ_G は，代表的家計の時間選好率 θ_P と必ずしも一致しているとは限らない。この非同一性は，本モデルにおいて重要な役割を果たすことになる。両者の時間選好率が異なる理由は，⑴ 政府は，経済のみならず政治的な観点から選ばれるが，代表的家計は経済面のみからの代表である，⑵ 政府は，一人一票の選挙制度の下では，一般に中位の投票者により選ばれるが，代表的家計は全ての家計の中位数でなく平均を意味する，[4] ⑶ 仮に代表的家計と同じ時間選好率の政府を選ぼうとしたとしても，その選択結果には誤差があり，必ずしも同じになるとは限らない（例えば，Alesina and Cukierman, 1990 を参照），⑷ 現在の国民による選択は，将来の国民の選択を縛ることができない（例えば，Tabellini and Alesina, 1990 を参照）などを挙げることができる。したがって，むしろ，政府と代表的家計の時間選好率は，通常は一致しないと考えられる。ここで注意すべきは，仮に両者が一致しなくても，リバイアサン政府は，何の躊躇もなく，自己の時間選好率のみに従って行動することである。

3　同時最適化

3．1　政府と家計の同時最適化

まず，代表的家計の最適化問題を検討する。ハミルトニアンを

$$H_P = u_P(c_t,m_t)\exp(-\theta_P t)+\lambda_{P,t}\left[r_t a_t + w_t + z_t - c_t - (\pi_t + r_t)m_t - g_t\right]$$

とする。ここで，$\lambda_{P,t}$ は共役変数，c_t と m_t は制御変数，a_t は状態変数である。代表的家計の最適化のための必要条件は，

$$\frac{\partial u_P(c_t,m_t)}{\partial c_t}\exp(-\theta_P t)=\lambda_{P,t} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_P(c_t,m_t)}{\partial m}\exp(-\theta_P t)=\lambda_{P,t}(\pi_t + r_t) \tag{2}$$

$$\dot{\lambda}_{P,t} = -\lambda_{P,t}\, r_t \tag{3}$$

$$\dot{a}_t = (ra_t + w_t + z_t) - \left[c_t + (\pi_t + r_t)\, m_t - g_t\right] \tag{4}$$

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_{P,t}\, a_t = 0 \tag{5}$$

である。⑴ 及び ⑵ 式より，$\dfrac{\dfrac{\partial u_P(c_t,m_t)}{\partial m_t}}{\dfrac{\partial u_P(c_t,m_t)}{\partial c_t}} = \pi_t + r_t$，そして，⑴ 及び ⑶ 式より，$-\dfrac{c_t\dfrac{\partial^2 u_P(c_t,m_t)}{\partial c_t^2}}{\dfrac{\partial u_P(c_t,m_t)}{\partial c_t}}\dfrac{\dot{c}_t}{c_t}+\theta_P = r_t$ となる。したがって，

$$\theta_P = r_t \tag{6}$$

さらに，$\dot{c}_t = 0$ 及び $\dot{k}_t = 0$ なる定常状態において，

$$\frac{\dfrac{\partial u_P(c_t,m_t)}{\partial m_t}}{\dfrac{\partial u_P(c_t,m_t)}{\partial c_t}} = \pi_t + \theta_P \tag{7}$$

4　中位投票者定理に関する文献、例えば、Downs (1957) を参照のこと。

となる。

次に，リバイアサン政府の最適化問題を検討する。ハミルトニアンを

$$H_G = u_G(g_t, x_t)\exp(-\theta_G t) + \lambda_{G,t}\left[b_t(R_t - \pi_t) + g_t - x_t - s_t\right]$$

とする。ここで，$\lambda_{G,t}$ は共役変数である。政府の最適化のための必要条件は，

$$\frac{\partial u_G(g_t, x_t)}{\partial g_t}\exp(-\theta_G t) = -\lambda_{G,t} \tag{8}$$

$$\frac{\partial u_G(g_t, x_t)}{\partial x_t}\exp(-\theta_G t) = \lambda_{G,t} \tag{9}$$

$$\dot{\lambda}_{G,t} = -\lambda_{G,t}(R_t - \pi_t) \tag{10}$$

$$\dot{b}_t = b_t(R_t - \pi_t) + g_t - x_t - s_t \tag{11}$$

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_{G,t}\, b_t = 0 \tag{12}$$

である。(8)，(9) 及び (10) 式より，$-\dfrac{g_t \dfrac{\partial^2 u_G(g_t,x_t)}{\partial g_t^2}}{\dfrac{\partial u_G(g_t,x_t)}{\partial g_t}}\dfrac{\dot{g}_t}{g_t} + \theta_G = R_t - \pi_t = r_t + \pi^e_{b,t} - \pi_t$ 及び $-\dfrac{x_t \dfrac{\partial^2 u_G(g_t,x_t)}{\partial x_t{}^2}}{\dfrac{\partial u_G(g_t,x_t)}{\partial x_t}}\dfrac{\dot{x}_t}{x_t} + \theta_G = R_t - \pi_t = r_t + \pi^e_{b,t} - \pi_t$

が得られる。ここで，$\dot{g}_t = 0$ 及び $\dot{x}_t = 0$ なる定常状態において，$\dfrac{g_t \dfrac{\partial^2 u_G(g_t,x_t)}{\partial g_t^2}}{\dfrac{\partial u_G(g_t,x_t)}{\partial g_t}}\dfrac{\dot{g}_t}{g_t} = 0$ 及び $\dfrac{x_t \dfrac{\partial^2 u_G(g_t,x_t)}{\partial x_t{}^2}}{\dfrac{\partial u_G(g_t,x_t)}{\partial x_t}}\dfrac{\dot{x}_t}{x_t} = 0$ であり，

したがって $\theta_G = r_t + \pi^e_{b,t} - \pi_t$ である。この式に (6) 式を代入すると $\theta_G = \theta_P + \pi^e_{b,t} - \pi_t$ となることから，$\dot{g}_t = 0$，$\dot{x}_t = 0$，$\dot{c}_t = 0$ 及び $\dot{k}_t = 0$ なる定常状態において，

$$\pi^e_{b,t} = \pi_t + \theta_G - \theta_P \tag{13}$$

である。

(13) 式は，リバイアサン政府と代表的家計の同時最適化の自然な結果を示すものである。もし，両者の時間選好率が相違していれば，$\pi^e_{b,t} \neq \pi_t$ となる。(13) 式は，その場合に，π_t が積分方程式

$$\pi_t = \int_{t-1}^{t}\int_{s}^{s+1} \pi_v\, dv\ ds - \theta_G + \theta_P$$

に従って変化することを示している。したがって，(13) 式は，$\pi^e_{b,t} = \pi_t$ が成り立つのは両者の時間選好率が同じ場合 ($\theta_G = \theta_P$) のみであることを示している。

3.2　物価変動の法則

(13) 式（あるいは積分方程式 $\pi_t = \int_{t-1}^{t}\int_{s}^{s+1} \pi_v\, dv\, ds - \theta_G + \theta_P$）は，時間選好率が相違する場合には，インフレが加速あるいは減速することを意味する。つまり，政府と家計は，その時間選好率の相違という矛盾を，インフレの加速あるいは減速によって解消しているともいえる。

ここで，もし $\int_{t}^{t+1} \pi_v\, dv - \pi_t = \theta_G - \theta_P$ ならば，$\pi_t = \pi_0 + 2(\theta_G - \theta_P)t$ である。したがって，$\int_{t-1}^{t}\int_{s}^{s+1} \pi_v\, dv\ \ ds - \pi_t = \theta_G - \theta_P \neq 0$ は，

インフレの加速，減速が非線形であることを示す。すなわち，

$$\pi_t = \pi_0 + y(\theta_G - \theta_P)\exp[z_t \ln(t)]$$

に従う。ここで, y は定数, z_t は変数である。より正確に言えば, 時間 $t+1$ と時間 $t+1+dt$ の間の十分に短い期間において, π_{t+1+dt} は，式

$$\int_t^{t+dt}\int_s^{s+1}\pi_v\, dv\ \ ds = \int_{t-1}^{t-1+dt}\int_s^{s+1}\pi_v\, dv\, ds + \pi_{t+dt} - \pi_t$$

が成立し，かつ $\int_{t-1}^{t}\int_s^{s+1}\pi_v\, dv\, ds - \pi_t = \theta_G - \theta_P$ を満たす π_s によって決められる。

さて，ここで，当初 $\theta_G = \theta_P$ であったものの，時間 $t=0$ に θ_G が変化し，それ以降，両者は一致しなくなったと想定する。時間 $t=0$ 以前は，π_t は一定なので，$\int_{t-1}^{t}\int_s^{s+1}\pi_v\, dv\ \ ds = \int_{-1}^{0}\int_0^{s+1}(\pi_v - \pi_0)dv\ \ ds + \pi_0$ である。ここで，さらに時間 $t=0$ において π_t が連続であるようにするために，期間 $0 \le t < 1$ において $\pi_t = \pi_0 + yt$ であると仮定する（y は定数）。したがって，期間 $0 \le t < 1$ において，$\pi_t = \pi_0 + 6(\theta_G - \theta_P)t$ となる。時間 $t=1$ 以降，π_t は，徐々に $\pi_t = \pi_0 + 6(\theta_G - \theta_P)t$ の経路から，もし $\theta_G > \theta_P$ であれば上方に，もし $\theta_G < \theta_P$ であれば下方に，以下の ⒁ 式のように乖離していく。

$$\pi_t = \pi_0 + 6(\theta_G - \theta_P)\exp[z_t \ln(t)] \tag{14}$$

ここで，$\int_{t-1}^{t}\int_s^{s+1}\pi_v\, dv\, ds - \pi_t = \theta_G - \theta_P$ が成り立つためには，$z_t > 1$ である。さらに，$-1 < t \le 1$ において $-\infty < \pi_t < \infty$ ならば，

$$\lim_{t\to\infty} z_t = 2$$

である（証明は，Harashima, 2008 参照）。

4　最適貨幣量

4．1　希少資源としての貨幣

フリードマン・ルールは，代表的家計の貨幣需要が飽和するまで貨幣は供給されるべきだとする。貨幣需要の飽和点は，

$$\frac{\partial u_P(c^*, m_t)}{\partial m_t} = 0$$

であり，(7) 式より，$\pi_t + \theta_P = \pi_t + r_t = 0$ となる点である。ここで，c^* は，定常状態における c_t である。もし政府が代表的家計の完全な支配下にあり，代表的家計が需要するだけ貨幣を供給させられるならば，飽和点に達することは可能である。この場合，代表的家計にとって貨幣は希少資源ではない。しかし，政府がリバイアサンで代表的家計の支配下にない場合には，もはや代表的家計は政府に需要するだけの貨幣を供給させることはできない。(7) 式と ⒁ 式より，定常状態では

$$\frac{\dfrac{\partial u_P(c_t, m_t)}{\partial m_t}}{\dfrac{\partial u_P(c_t, m_t)}{\partial c_t}} = \pi_0 + 6(\theta_G - \theta_P)\exp[z_t \ln(t)] + \theta_P$$

となる。したがって，実質貨幣量 m_t は，定常状態において，

$$\frac{\partial u_P(c^*, m_t)}{\partial m_t} = \{\pi_0 + 6(\theta_G - \theta_P)\exp[z_t \ln(t)] + \theta_P\}\frac{\partial u_P(c^*, m_t)}{\partial c^*} \tag{15}$$

を満たす。

⒂ 式は，重要な意味を持っている。なぜなら，⒂ 式は，一般に，

$$\frac{\partial u_P\left(c^*,m_t\right)}{\partial m_t}\neq 0$$

であることを意味するからである。これは，

$$\frac{\partial u_P\left(c^*,m_t\right)}{\partial c^*}>0$$

であるからである。さて，もし，$\theta_G=\theta_P$ ならば，フリードマン・ルールは成立しえる。なぜなら，$\pi_0+\theta_P=0$ ならば $\pi_0+6\left(\theta_G-\theta_P\right)\exp\left[z_t\ln(t)\right]+\theta_P=0$ そして $\frac{\partial u_P\left(c^*,m_t\right)}{\partial m_t}=0$ となるからである。しかし，前述のように，$\theta_G=\theta_P$ となることは，必ずしも保証されない。むしろ，一般に，$\theta_G\neq\theta_P$ である。したがって，フリードマン・ルールが主張するように貨幣量が代表的家計の需要の飽和点まで供給されることは，一般にはない。リバイアサン政府の下では，代表的家計は政府を通じて好きなだけ貨幣を供給できる訳ではないので，貨幣は代表的家計にとって希少資源であるといえる。この時，貨幣量は，⒂ 式に従って内生的に決定される。フリードマン・ルールが想定する経済と異なり，貨幣量がインフレ率を決定するのではなく，⒂ 式に基づいて，インフレ率が貨幣量を決定する。そして，インフレ率は，貨幣量とは独立に，⒁ 式によって決定される。

４．２　正の名目金利

一般に $\frac{\partial u_P\left(c^*,m_t\right)}{\partial m_t}\neq 0$ であることから，⑵ 式より，一般に

$$\pi_t+r_t\neq 0$$

である。したがって，貨幣の収益率 $-\pi_t$ は，必ずしも資本収益率 r_t と一致せず，したがって，フリードマン・ルールに従う必要もない。重要なことは，政府と家計の同時最適化が，一般に名目金利とインフレ率は正となることを意味することである。$\frac{\partial u_P\left(c_t,m_t\right)}{\partial c_t}>0$ であることから，⑴ 式より，

$$\lambda_{P,t}>0$$

である。(15) 式より，もし $\theta_G-\theta_P\geq 0$ 及び $\pi_0>-\theta_P$ ならば，定常状態において

$$\frac{\partial u_P\left(c_t,m_t\right)}{\partial m_t}>0$$

である。ここで，⑵ 式より，

$$\frac{\partial u_P\left(c_t,m_t\right)}{\partial m_t}\exp\left(-\theta_P t\right)=\lambda_{P,t}\left(\pi_t+r_t\right)$$

である。したがって，もし $\theta_G-\theta_P\geq 0$ 及び $\pi_0>-\theta_P$ ならば，定常状態において，

$$\pi_t+r_t>0 \tag{16}$$

である。不等式 ⒃ は，一般に，名目金利は正であることを示している。なぜなら，条件 $\theta_G-\theta_P\geq 0$ 及び $\pi_0>-\theta_P$ は，一般に広く観察され，通常満たされていると考えられるからである。例えば，$\pi_0=0.02$，$\theta_P=r_t=0.03$，$\theta_G-\theta_P=0$ で

あったとする。この場合 $\theta_G - \theta_P = 0$ なので，２％のインフレ率はその後も継続し，名目金利は５％でこれも持続する。$\pi_0 = 0.02$，$\theta_P = r_t = 0.03$，$\theta_G - \theta_P = 0$ に対応する固有の貨幣量は，⒂ 式によって $\frac{\partial u_P\left(c^*, m_t\right)}{\partial m_t} = 0.05 \frac{\partial u_P\left(c^*, m_t\right)}{\partial c^*}$ を満たすように決定される。

重要なことは，⒂ 式が満たされていることは，例えフリードマン・ルールを満たさなくても最適な状態であることである。⒂ 式を満たす貨幣量において，政府と代表的家計は同時に最適な状態になる。⒂ 式を満たしていれば，それ以上厚生を向上させる余地はない。⒂ 式を満たす貨幣量より少ない貨幣量であれば，代表的家計の最適条件は満たされない。一方，⒂ 式を満たす貨幣量より多い貨幣量であれば，政府の最適条件は満たされない。なぜなら，貨幣の超過供給がある状態で ⒂ 式を満たそうとすれば，より小さい値の $\frac{\partial u_P\left(c^*, m_t\right)}{\partial m_t}$ に対応して，⒁ 式が求めるインフレ率よりも低いインフレ率にならなければならないからである。このため，政府の債務は最終的に発散してしまい，⑿ 式の横断性条件が満たされなくなる。この時，政府があえて ⒁ 式が求めるインフレ率となるように行動すると，⒂ 式さらには代表的家計の最適条件は満たされなくなる。したがって，⒂ 式を満たす貨幣量が最適貨幣量である。

５　結　　論

フリードマン･ルールにおいては, 暗黙的に政府は代表的家計の完全な支配下にあることが仮定されている。したがって, 代表的家計は, 実質的に需要するだけ際限なく貨幣を政府に供給させることが可能である。しかし, 現実には, 殆どの場合, フリードマン・ルールと相反する正の名目金利やインフレ率が観察されてきた。このことは，逆に，政府は代表的家計の完全な支配下にあるのではなく，その独自の政治的目的を追求している（つまり，政府はリバイアサンである）ことを示唆する。本論文では, リバイアサン政府を明示的に仮定したモデルを構築し, そのモデルに基づいて最適貨幣量を分析した。その最も重要な結論は，政府がリバイアサンである場合，政府と家計の同時最適化の結果として，一般に正の名目金利とインフレ率が観察されることが明らかとなったことである。

（参考文献）

Akerlof, George A., William Dickens, and George Perry.（2000）“Near Rational Wage and Price Setting and the Long Run Phillips Curve,” *Brookings papers on Economic Activity* 1, pp.1-44.

Alesina, Alberto and Alex Cukierman.（1990）“The Politics of Ambiguity,” *The Quarterly Journal of Economics,* Vol. 105, No. 4, pp. 829-50.

Brennan, Geoffrey and James M. Buchanan.（1980）*The Power to Tax: Analytical Foundations of a Fiscal Constitution,* Cambridge MA, Cambridge University Press.

Chari, V. V., Lawrence J. Christiano and Patrick J. Kehoe.（1996）“Optimality of the Friedman Rule in Economies with Distorting Taxes,” *Journal of Monetary Economics,* Vol. 37, Q1, pp. 203-23.

Cochrane, John H.（2005）“Money as Stock: Price Level Determination with No Money Demand,” *Journal of Monetary Economics,* Vo.l. 52, No. 3, pp. 501-528

Downs, Anthony.（1957）*An Economic Theory of Democracy,* Harper, New York.

Edwards, Jeremy and Michael Keen.（1996）“Tax Competition and Leviathan,” *European Economic Review,* Vol. 40, No. 1, pp. 113-34.

Friedman, Milton.（1969）*The Optimal Quantity of money and Other Essays,* Chicago, Aldine.

Harashima, Taiji.（2004）“The Ultimate Source of Inflation: A Microfoundation of the Fiscal Theory of the Price Level,” *EconWPA Working Papers,* ewp-mac/ 0409018.

Harashima, Taiji.（2008）“A Microfounded Mechanism of Observed Substantial Inflation Persistence,” *MPRA（The Munich Personal RePEc Archive）Paper,* No. 10668.

Leeper, Eric.（1991）“Equilibria under Active and Passive Monetary and Fiscal Policies,” *Journal of Monetary Economics,* Vol. 27, pp. 129-47.

Mulligan, Casey B. and Xavier X. Sala-i-Martin.（1997）“The Optimum Quantity of Money: Theory and Evidence,” *Journal of Money, Credit and Banking,* Vol. 29, No. 4, pp. 687-715.

Phelps, Edmund S.（1973）“Inflation in the Theory of Public Finance,” *Scandinavian Journal of Economics,* Vol. 75, pp. 67-82.

Sidrauski, Miguel.（1967）"Rational Choice and Patterns of Growth in a Monetary Economy," *American Economic Review,* Vol. 57, No. 2, pp.387-93.

Sims, Christopher A.（1994）"A Simple Model for Study of the Determination of the Price Level and the Interaction of Monetary and Fiscal Policy," *Economic Theory,* Vol.4, pp.381-99.

Sims, Christopher A.（1998）"Econometric implications of the government budget constraint," *Journal of Econometrics,* Vol. 83, pp. 9-19.

Tabellini, Guido and Alberto Alesina.（1990）"Voting on the Budget Deficit," *American Economic Review,* Vol. 80, No. 1, pp. 37-49.

Woodford, Michael.（2001）"Fiscal Requirements for Price Stability," *Journal of Money, Credit and Banking,* Vol. 33, pp. 669-728.