生産経済モデルに基づく異時点間の代替の弾力性の推計

An Estimate of the Elasticity of Intertemporal Substitution in a Production Economy

原　嶋　耐　治
Taiji Harashima

〈要約〉

異時点間の代替の弾力性（EIS）は, これまで交換経済モデルに基づいて推定されてきた。しかし, それらの推計値は，推計に使用する実質金利や資産収益率の選択によって大きく異なってしまう。したがって，生産経済モデルに基づく推計が必要になるが，その場合には，規模効果がなく，人口が増加しなくても成長し，オイラー方程式に従う内生的成長モデルが必要である。本論文では，こうしたモデルを構築し，実質金利や資産収益率の情報なしに EIS の推計を行った。推計結果によると，マクロ・レベルでの EIS の値は，0.087 と低いものであった。

JEL Classification code: D90, E10, O40

〈キーワード〉

異時点間の代替の弾力性；相対的危険回避度；生産経済；内生的経済成長モデル

はじめに

異時点間の代替の弾力性（The elasticity of intertemporal substitution（EIS））のマクロ・レベルでの推計は，殆どの場合，交換経済のモデルに基づいて行われてきた（例えば，Mehra and Prescott, 1985; Hall, 1988; Campbell and Mankiw, 1989; Kandel and Stambaugh, 1991; Epstein and Zin, 1991; Cochrane and Hansen, 1992; Obstfeld, 1994; Ogaki and Reinhart, 1998）。交換経済モデルにおいては，資本は捨象されているため資本の限界生産性は意味を持たず，外生的に与えられる実質金利によって生産面の全てが代表されることになる。したがって，交換経済に基づいて EIS を推計する場合には，実質金利や資産収益率に関する情報が不可欠となる。結果として，こうした推計値は，推計に用いる実質金利や資産収益率の選択によって大きく左右される。この問題は重大である。なぜなら，様々な異なる種類の実質金利や資産収益率が存在し，しかも，それらの値はかなりバラついており大きな相違がみられるからである。その理由は，実際の実質金利や資産収益率の値が，資本の限界生産性だけでなく，他の様々な要素，例えば，税，規制，資本の減価，リスク等によっても大きく影響されるからである。結果として，推計に用いる実質金利や資産収益率の選択によって，EIS の推計値は大きく異なることとなってしまう。Mulligan（2002, 2004）や McGrattan and Prescott（2003）は，この問題の重要性を特に強調している。

本論文の目的は，実質金利や資産収益率に関する情報を用いることなく EIS を推計する方法を見出すことである。つまり，交換経済ではなく，生産経済の動学モデルに基づいて推計する方法を見出すことである。生産経済においては，ハロッド中立生産関数におけるオイラー方程式は，$\rho = \frac{\dot{c}_t}{c_t}\left[(1-\alpha)\frac{y_t}{k_t} - n - \delta - \theta\right]^{-1}$ となる。ここで，ρ はEIS，y_t は一人当たり生産量，c_t は一人当たり消費量，k_t は一人当たり資本投入量，n は人口増加率，δ は減価償却率，θ は時間選好率，α は定数である。したがって，n，δ，θ，α の値，さらに消費の増加率 $\frac{\dot{c}_t}{c_t}$ と資本・産出高比率 $\frac{y_t}{k_t}$ が与えられると，異時点間の代替の弾力性（EIS）ρ は，実質金利や資産収益率の情報がなくても推計することができる。

しかし, このオイラー方程式は, 内生的成長のメカニズムなしに導かれたものである。内生的成長のメカニズムがないと, 生産経済は，$(1-\alpha)\frac{y_t}{k_t} - n - \delta - \theta = 0$ 及び $\frac{\dot{c}_t}{c_t} = 0$ で表される定常状態に落ち着く。したがって，$\rho = 0$ ということになる。したがって，EISは，このオイラー方程式から推計することはできない。生産経済に基づいてEISを推計するためには，内

生的経済成長モデルを用いなければならない。

しかし，内生的成長モデルに関しては，規模効果（scale effects）の問題が指摘されてきた（Jones, 1995a）。規模効果を解消するモデルも提案されているが，それらのモデルでは，経済成長が人口増加率によって規定される，あるいはオイラー方程式とは無関係になる等の別の問題が生じている（Jones, 1999; Young, 1998; Peretto, 1998; Aghion and Howitt, 1998; Dinopoulos and Thompson, 1998）。したがって，EIS の推計のためには，規模効果がなく，人口が増加しなくても成長し，オイラー方程式に従う内生的成長モデルが必要である。本論文は，こうした内生的成長モデルを構築し，それに基づき EIS を推計することを目的とする。この推計は，従来の方法と全く異なる新しいものであることから，EIS の値に関する議論において，新しい独立した証拠を提示するものとなる。

本論文の構成は，以下の通りである。第 1 章において，規模効果がなく，人口が増加しなくても成長し，オイラー方程式に従う内生的成長モデルを構築する。第 2 章で，このモデルにおける均斉成長経路等その基本的な性質を示す。第 3 章では，この内生的成長モデルを用いて，生産経済に基づくEISを推計する方法を示す。さらに，第 4 章において，この方法を用いて，実際にEISを推計する。最後に，第 5 章において，結論を述べる。

第１章　モデル[1]

生産関数を，$Y_t = F(A_t, K_t, L_t)$ とする。ここで，$Y_t\ (\geq 0)$ は生産量，$K_t\ (\geq 0)$ は資本投入，$L_t\ (\geq 0)$ は労働投入，$A_t\ (\geq 0)$ は技術（または，知識，アイデア）のそれぞれ期間 t における値である。ここで，以下のような仮定を置く。

仮定

(A1)　技術 A_t の蓄積は，$\dot{K}_t = Y_t - C_t - v\dot{A}_t - \delta K_t$ に従う。ここで，$v\ (>0)$ は定数である。一単位の K_t と一単位の v^{-1} は，同量の要素の投入によって生産される。

(A2)　全ての企業は同一で同じ規模を有しており，いかなる期間 t においても，$m = \varpi^{-1}\dfrac{M_t}{L_t}$ である。ここで，M_t は，t 期における企業の数，$m(>0)$ と $\varpi(>1)$ は，定数である。

(A3)　$\dfrac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \dfrac{\varpi}{M_t}\dfrac{\partial Y_t}{\partial (vA_t)}$ すなわち，$\dfrac{\partial y_t}{\partial k_t} = \dfrac{1}{mv}\dfrac{\partial y_t}{\partial A_t}$ を常に満たす。

単純化のため，特許の期間は無限と仮定し，資本の減耗はないものとする（つまり，$\delta = 0$）。ϖ は，特許による保護の効果を示している。特許の存在により，所得は，資本と労働に加え，技術にも配分される。仮定（A1）は，技術は，他の消費財や生産財と同様に，資本，労働及び技術によって生産されることを意味している。仮定（A2）は，人口数と企業数は正相関していることを意味している。m が定数であることは，暗黙的に，人口が増加しても，平均すると企業の規模は変化しないことを意味している。仮定（A3）は，K_t への投資の収益率と A_t への投資の収益率は，市場における裁定を通じて常に同一に保たれることを意味している。一方で，仮定（A3）は，新しい技術に投資した企業が，その投資から得られる収益全てを手に入れることができないことも示している。つまり，ある企業の A_t への投資の結果として Y_t は増加するが，A_t に投資した当該企業の得られる収益は，Y_t の増加分の一部，すなわち $\dfrac{\varpi}{M_t}\dfrac{\partial Y_t}{\partial (vA_t)} = \dfrac{1}{mL_t}\dfrac{\partial Y_t}{\partial (vA_t)}$ に過ぎない。これは，他の企業に対価なしに知識がスピルオーバー（uncompensated knowledge spillovers）したこと，及び，技術の補完性の結果である。技術には非競合性（non-rivalness）があることから，全ての企業が，無対価知識スピルオーバーの恩恵を享受できる。結果として，$\dfrac{\partial Y_t}{\partial A_t}$ のうち投資企業が得られる部分は，非常に小さいであろう。すなわち，ϖ の値は，M_t と比較してかなり小さいであろう。

ここで，生産関数を，

$$Y_t = F(A_t, K_t, L_t) = A_t^{\alpha} f(K_t, L_t)$$

[1] このモデルは，Harashima (2013) に基づいている。

とより特定化する。なお，$\alpha(0<\alpha<1)$ は，定数であり，$f(K_t, L_t)$ は，一次同次である。さらに，$y_t = \frac{Y_t}{L_t}$，$k_t = \frac{K_t}{L_t}$，$c_t = \frac{C_t}{L_t}$，$n_t = \frac{\dot{L}_t}{L_t}$ とする。したがって $y_t = A_t^{\alpha} f(k_t)$ であり，仮定（A1）より，

$$\dot{k}_t = y_t - c_t - \frac{v\dot{A}_t}{L_t} - n_t k_t - \delta k_t \tag{1}$$

となる。仮定（A1）及び（A2）より，

$$A_t = \frac{\alpha f(k_t)}{m v f'(k_t)}$$

となる。なぜなら，

$$\frac{\partial y_t}{m v \partial A_t} = \frac{\partial y_t}{\partial k_t} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{mv} A_t^{\alpha-1} f(k_t) = A_t^{\alpha} f'(k_t)$$

であるからである。また，$A_t = \frac{\alpha f}{m v f'}$ であることから，

$$y_t = A_t^{\alpha} f = \left(\frac{\alpha}{mv}\right)^{\alpha} \frac{f^{1+\alpha}}{f'^{\alpha}}$$

及び，

$$\dot{A}_t = \frac{\alpha}{mv}\dot{k}_t\left(1-\frac{f f''}{f'^2}\right)$$

となる。

単純化のため，人口増加率は正で一定，すなわち，$n_t = n > 0$ とする。さらに，ハロッド中立技術進歩のケース，すなわち $y_t = A_t^{\alpha} k_t^{1-\alpha}$ したがって $Y_t = K_t^{1-\alpha}(A_t L_t)^{\alpha}$ のケースのみを対象とする。 $A_t = \frac{\alpha f(k_t)}{m v f'(k_t)}$ 及び $f = k_t^{1-\alpha}$ であることから，

$$A_t = \frac{\alpha}{mv(1-\alpha)} k_t$$

及び

$$\frac{f f''}{f'^2} = -\frac{\alpha}{1-\alpha}$$

である。したがって，資本蓄積のメカニズムを示す式（1）は，

$$\dot{k}_t = y_t - c_t - \frac{v\dot{A}_t}{L_t} - nk_t - \delta k_t \quad = \left(\frac{\alpha}{mv}\right)^{\alpha}\frac{f^{1+\alpha}}{f'^{\alpha}} - c_t - \frac{\alpha}{mL_t}\dot{k}_t\left(1-\frac{f f''}{f'^2}\right) - nk_t - \delta k_t$$

となり，さらに

$$\dot{k}_t = \frac{\left(\frac{\alpha}{mv}\right)^{\alpha}\frac{f^{1+\alpha}}{f'^{\alpha}} - c_t - nk_t - \delta k_t}{1+\frac{\alpha}{mL_t}\left(1-\frac{f f''}{f'^2}\right)} = \frac{mL_t(1-\alpha)}{mL_t(1-\alpha)+\alpha}\left\{\left[\left(\frac{\alpha}{mv}\right)^{\alpha}(1-\alpha)^{-\alpha} - n - \delta\right]k_t - c_t\right\}$$

と表すことができる。

代表的家計の最適化問題は，制約条件

$$\dot{k}_t = \frac{mL_t(1-\alpha)}{mL_t(1-\alpha)+\alpha}\left\{\left[\left(\frac{\alpha}{mv}\right)^{\alpha}(1-\alpha)^{-\alpha} - n - \delta\right]k_t - c_t\right\}$$

の下で，期待効用

$$E_0\int_0^{\infty} u(c_t)\exp(-\theta t)dt$$

を最大化するというものである。

第2章　モデルの基本的な性質

第 1 章のモデルに対し，ハミルトニアン H を

$$H = u(c_t)\exp(-\theta t) + \lambda_t \frac{mL_t(1-\alpha)}{mL_t(1-\alpha)+\alpha}\left\{\left[\left(\frac{\alpha}{mv}\right)^{\alpha}(1-\alpha)^{-\alpha} - n - \delta\right]k_t - c_t\right\}$$

と置く。ここで，λ_t は，共役変数である。したがって，最適条件は，

$$\frac{\partial u(c_t)}{\partial c_t}\exp(-\theta t) = \frac{[mL_t(1-\alpha)+\alpha]}{mL_t(1-\alpha)}\lambda_t \tag{2}$$

$$\dot{\lambda}_t = -\lambda_t \frac{mL_t(1-\alpha)}{mL_t(1-\alpha)+\alpha}\left[\left(\frac{\alpha}{mv}\right)^{\alpha}(1-\alpha)^{-\alpha} - n - \delta\right] \tag{3}$$

$$\dot{k}_t = \frac{mL_t(1-\alpha)}{mL_t(1-\alpha)+\alpha}\left\{\left[\left(\frac{\alpha}{mv}\right)^{\alpha}(1-\alpha)^{-\alpha} - n - \delta\right]k_t - c_t\right\} \tag{4}$$

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_t k_t = 0 \tag{5}$$

となる。

モデルの基本的性質は，以下の補題で示す通りである。

補題 1：消費の変化率は，

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \rho\left\{\frac{mL_t(1-\alpha)\left[\left(\frac{\alpha}{mv}\right)^{\alpha}(1-\alpha)^{-\alpha} - n - \delta\right]}{mL_t(1-\alpha)+\alpha} - \theta\right\}$$

すなわち

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \rho\left[\left(\frac{\alpha}{mv}\right)^{\alpha}(1-\alpha)^{-\alpha} - n - \delta - \theta\right]$$

である。

証明：式（3）より，

$$\dot{\lambda}_t = -\lambda_t \frac{mL_t(1-\alpha)}{mL_t(1-\alpha)+\alpha}\left[\left(\frac{\alpha}{mv}\right)^{\alpha}(1-\alpha)^{-\alpha} - n - \delta\right]$$

であり，さらに，式（4）より，

$$\dot{k}_t = \frac{mL_t(1-\alpha)}{mL_t(1-\alpha)+\alpha}\left\{\left[\left(\frac{\alpha}{mv}\right)^{\alpha}(1-\alpha)^{-\alpha} - n - \delta\right]k_t - c_t\right\}$$

である。したがって，式（2）より，

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\dfrac{mL_t(1-\alpha)\left[\left(\frac{\alpha}{mv}\right)^{\alpha}(1-\alpha)^{-\alpha} - n - \delta\right]}{mL_t(1-\alpha)+\alpha} - \theta}{\left(-\dfrac{c_t u''}{u'}\right)} = \rho\left\{\frac{mL_t(1-\alpha)\left[\left(\frac{\alpha}{mv}\right)^{\alpha}(1-\alpha)^{-\alpha} - n - \delta\right]}{mL_t(1-\alpha)+\alpha} - \theta\right\}$$

であり，ゆえに，$\dfrac{\dot{L}_t}{L_t} = n > 0$ であることから，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \rho\left[\left(\frac{\alpha}{mv}\right)^{\alpha}(1-\alpha)^{-\alpha} - n - \delta - \theta\right]$ である。 ■

補題 2 ： もし $\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{c}_t}{c_t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{k}_t}{k_t}$ であれば，そしてその場合に限って，全ての最適条件は満たされる。

証明：(Step 1) 式（4）より，

$$\dot{k}_t=\frac{mL_t(1-\alpha)}{mL_t(1-\alpha)+\alpha}\left\{\left[\left(\frac{\alpha}{mv}\right)^{\alpha}(1-\alpha)^{-\alpha}-n-\delta\right]k_t-c_t\right\}$$

である。したがって，

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t}=\frac{mL_t(1-\alpha)}{mL_t(1-\alpha)+\alpha}\left\{\left[\left(\frac{\alpha}{mv}\right)^{\alpha}(1-\alpha)^{-\alpha}-n-\delta\right]-\frac{c_t}{k_t}\right\}$$

である。一方，式（3）より

$$\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}=-\frac{mL_t(1-\alpha)}{mL_t(1-\alpha)+\alpha}\left[\left(\frac{\alpha}{mv}\right)^{\alpha}(1-\alpha)^{-\alpha}-n-\delta\right]$$

である。

ここで，

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}+\frac{\dot{k}_t}{k_t}\right)=-\lim_{t\to\infty}\frac{mL_t(1-\alpha)}{mL_t(1-\alpha)+\alpha}\left\{\left(\frac{\alpha}{mv}\right)^{\alpha}(1-\alpha)^{-\alpha}-n-\delta-\left[\left(\frac{\alpha}{mv}\right)^{\alpha}(1-\alpha)^{-\alpha}-n-\delta\right]+\frac{c_t}{k_t}\right\}=-\lim_{t\to\infty}\frac{c_t}{k_t}$$

である。したがって，もし $\lim_{t\to\infty}\frac{c_t}{k_t}>0$ ならば，$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}+\frac{\dot{k}_t}{k_t}\right)<0$ である。ゆえに，横断性条件（5）$\lim_{t\to\infty}\lambda_t k_t=0$ は，もし $\lim_{t\to\infty}\frac{c_t}{k_t}=0$ であれば，そしてその場合に限って満たされない。（なぜなら，$c_t\geq 0$ 及び $k_t\geq 0$）

(Step 2) 補題 1 より，

$$\lim_{t\leftarrow\infty}\frac{\dot{c}_t}{c_t}=\rho\left[\left(\frac{\alpha}{mv}\right)^{\alpha}(1-\alpha)^{-\alpha}-n-\delta-\theta\right]=\text{constant}$$

であり，また，式（4）より，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{k}_t}{k_t}=\lim_{t\to\infty}\frac{mL_t(1-\alpha)}{mL_t(1-\alpha)+\alpha}\left\{\left[\left(\frac{\alpha}{mv}\right)^{\alpha}(1-\alpha)^{-\alpha}-n-\delta\right]-\frac{c_t}{k_t}\right\}=\left(\frac{\alpha}{mv}\right)^{\alpha}(1-\alpha)^{-\alpha}-n-\delta-\lim_{t\to\infty}\frac{c_t}{k_t}$$

である。もし，$\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{k}_t}{k_t}>\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{c}_t}{c_t}$ ならば，$\frac{c_t}{k_t}$ は時間とともに減少し，$\frac{\dot{k}_t}{k_t}$ は上昇する。したがって，最終的には，$\frac{c_t}{k_t}$ はゼロとなり，（step 1）より，横断性条件（5）は満たされない。もし，$\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{k}_t}{k_t}<\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{c}_t}{c_t}$ ならば，$\frac{c_t}{k_t}$ は時間とともに増加し，$\frac{\dot{k}_t}{k_t}$ は低下し最終的には負となる。したがって，k_t は，減少し，最終的には負となり，$k_t\geq 0$ の条件は満たされなくなる。一方，もし，$\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{c}_t}{c_t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{k}_t}{k_t}$ ならば，$\lim_{t\to\infty}\frac{c_t}{k_t}$ は一定であり，したがって，補題 1 より $\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{c}_t}{c_t}=\text{constant}$ であることから，$\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{k}_t}{k_t}$ 及び $\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{c}_t}{c_t}$ は，一定で同一である。 ■

合理的な家計は，疑いなく，全ての最適条件が満たされる成長経路，すなわち $\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{c}_t}{c_t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{k}_t}{k_t}=\text{constant}$ に至るように当初の消費量を選択するであろう。そこで，所与の A_0 と k_0 に対して，代表的家計は，全ての最適条件が満たされるように初期消費を選択すると仮定する。その時，企業は，$\frac{\partial Y_t}{\partial K_t}=\frac{\varpi}{M_t}\frac{\partial Y_t}{\partial(vA_t)}$ が満たされるように k_t を調整する。こうした家計と企業の合理的な行動の結果として，以下のような均斉成長経路が達成される。

補題 3 ： $\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{y}_t}{y_t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{A}_t}{A_t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{c}_t}{c_t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{k}_t}{k_t}=\text{constant}$

証明：(Step 1) $\dot{y}_t=\left(\dfrac{A_t}{k_t}\right)^{\alpha}\left[(1-\alpha)\dot{k}_t+\alpha\dfrac{k_t}{A_t}\dot{A}_t\right]$ 及び $\dot{A}_t=\dfrac{\alpha}{mv}\dot{k}_t\left(1-\dfrac{ff''}{f'^2}\right)=\dfrac{\alpha}{mv(1-\alpha)}\dot{k}_t$ であることから，

$$\dot{y}_t=\dot{k}_t\left(\frac{A_t}{k_t}\right)^{\alpha}\left[(1-\alpha)+\frac{\alpha^2}{mv(1-\alpha)}\frac{k_t}{A_t}\right]$$

であり，ゆえに，

$$\frac{\dot{y}_t}{y_t}=\frac{\dot{k}_t}{k_t}\left[(1-\alpha)+\frac{\alpha^2}{mv(1-\alpha)}\frac{k_t}{A_t}\right]$$

である。$A_t=\dfrac{\alpha}{mv(1-\alpha)}k_t$ であることから，

$$\frac{\dot{y}_t}{y_t}=\frac{\dot{k}_t}{k_t}[(1-\alpha)+\alpha]=\frac{\dot{k}_t}{k_t}$$

である。したがって，$\lim_{t\to\infty}\dfrac{\dot{y}_t}{y_t}=\lim_{t\to\infty}\dfrac{\dot{c}_t}{c_t}=\lim_{t\to\infty}\dfrac{\dot{k}_t}{k_t}=\text{constant}$ である。

(Step 2) $\dot{y}_t=\left(\dfrac{A_t}{k_t}\right)^{\alpha}\left[(1-\alpha)\dot{k}_t+\alpha\dfrac{k_t}{A_t}\dot{A}_t\right]$ 及び $\dot{A}_t=\dfrac{\alpha}{mv(1-\alpha)}\dot{k}_t$ であることから，

$$\dot{y}_t=\dot{A}_t\left(\frac{A_t}{k_t}\right)^{\alpha}\left[\frac{mv(1-\alpha)^2}{\alpha}+\alpha\frac{k_t}{A_t}\right]$$

であり，ゆえに，

$$\frac{\dot{y}_t}{y_t}=\frac{\dot{A}_t}{k_t}\frac{mv(1-\alpha)^2}{\alpha}+\alpha\frac{\dot{A}_t}{A_t}$$

である。$\dot{A}_t=\dfrac{\alpha}{mv(1-\alpha)}\dot{k}_t$ であることから，

$$\frac{\dot{y}_t}{y_t}=(1-\alpha)\frac{\dot{k}_t}{k_t}+\alpha\frac{\dot{A}_t}{A_t}$$

である。したがって，

$$\frac{\dot{y}_t}{y_t}=\frac{\dot{k}_t}{k_t}=(1-\alpha)\frac{\dot{k}_t}{k_t}+\alpha\frac{\dot{A}_t}{A_t}$$

であり，ゆえに，

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t}=\frac{\dot{A}_t}{A_t}$$

である。したがって，$\lim_{t\to\infty}\dfrac{\dot{y}_t}{y_t}=\lim_{t\to\infty}\dfrac{\dot{A}_t}{A_t}=\lim_{t\to\infty}\dfrac{\dot{c}_t}{c_t}=\lim_{t\to\infty}\dfrac{\dot{k}_t}{k_t}=\text{constant}$ である。 ■

補題１～３は，均斉成長経路 $\lim_{t\to\infty}\dfrac{\dot{c}_t}{c_t}=\rho\left[\left(\dfrac{\alpha}{mv}\right)^{\alpha}(1-\alpha)^{-\alpha}-n-\delta-\theta\right]$ は，人口の規模とは無関係で，かつ，仮に人口が増加しなくても成長することを示している。このことは，この内生的経済成長モデルが，目指していた「規模効果がなく，人口が増加しなくても成長し，オイラー方程式に従う」モデルであることを示している。[2] したがって，このモデルは，生産経済において EIS を推計するために必要な内生的成長モデルの要件を満たしているといえる。

[2] 均斉成長経路を示す式の変数に含まれていることから分かるように，本モデルでも，消費の増加率は人口増加率 n の影響を一部受けるが，Jones（1995b）のモデルとは異なり，人口増加率は消費増加の主要な要因ではなく，仮に人口が増加しなくても経済は成長できる。

第3章　EIS の推計方法

3．1　推計式

第１及び２章のモデルを用いて，生産経済に基づく EIS の推計する方法を示す。推計に用いられる式は，以下の命題に示され通りである。命題が示すように，EIS（ρ）は，均斉成長経路にある時，実質金利や資産収益率の情報なしに示すことができる。

命題： $\rho = \lim_{t \leftarrow \infty} \frac{\dot{c}_t}{c_t}\left[\frac{y_t}{k_t} - n - \delta - \theta\right]^{-1}$

証明： 補題１より，$\lim_{t\to\infty} \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \rho\left[\left(\frac{\alpha}{mv}\right)^{\alpha}(1-\alpha)^{-\alpha} - n - \delta - \theta\right]$ である。一方，$y_t = A_t^{\alpha} k_t^{1-\alpha}$ 及び $A_t = \frac{\alpha}{mv(1-\alpha)} k_t$ より，

$$\left(\frac{\alpha}{mv}\right)^{\alpha}(1-\alpha)^{-\alpha} = \frac{y_t}{k_t}$$

である。したがって，$\rho = \lim_{t \leftarrow \infty} \frac{\dot{c}_t}{c_t}\left[\frac{y_t}{k_t} - n - \delta - \theta\right]^{-1}$ である。 ■

命題の式は，消費の変化率の極限 $\lim_{t \leftarrow \infty} \frac{\dot{c}_t}{c_t}$ を含んでいる。しかし，もし人口が十分に大きい場合には，近似的に $\frac{mL_t(1-\alpha)}{mL_t(1-\alpha)+\alpha} = 1$ 及び $\frac{\alpha n}{mL_t(1-\alpha)+\alpha} = 0$ と置くことが可能であり，その場合には，消費の増加率の極限は不要になる。

系１： もし，人口数 Lt が十分に大きく，近似的に $\frac{mL_t(1-\alpha)}{mL_t(1-\alpha)+\alpha} = 1$ 及び $\frac{\alpha n}{mL_t(1-\alpha)+\alpha} = 0$ と置くことが可能であれば，$\rho = \frac{\dot{c}_t}{c_t}\left[\frac{y_t}{k_t} - n - \delta - \theta\right]^{-1}$。

証明： 補題１より，$\lim_{t\to\infty} \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \rho\left[\left(\frac{\alpha}{mv}\right)^{\alpha}(1-\alpha)^{-\alpha} - n - \delta - \theta\right]$ である。もし，L_t が十分に大きい場合には，

$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \rho\left[\left(\frac{\alpha}{mv}\right)^{\alpha}(1-\alpha)^{-\alpha} - n - \delta - \theta\right]$ となる。したがって $\lim_{t\to\infty} \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\dot{c}_t}{c_t}$ であり，ゆえに，命題より，$\rho = \frac{\dot{c}_t}{c_t}\left[\frac{y_t}{k_t} - n - \delta - \theta\right]^{-1}$ である。 ■

現在の多くの国家・経済の人口は十分に大きいと考えられることから，$\frac{mL_t(1-\alpha)}{mL_t(1-\alpha)+\alpha} = 1$ 及び $\frac{\alpha n}{mL_t(1-\alpha)+\alpha} = 0$ と置いても，全く不自然ではないであろう。

系１は，パラメーター α，n，δ，θ の値に加え，消費増加率 $\frac{\dot{c}_t}{c_t}$ 及び資本・産出高比率 $\frac{y_t}{k_t}$ が与えられると，生産経済における EIS の値を，実質金利や資産収益率の情報なしに推計できることを示している。

3．2　EIS と時間選好率

EIS の推計のためには，時間選好率（RTP）の適切な値を知る必要がある。RTPの値を得る一つの方法は，技術進歩が外生の動学モデルにおける定常状態を示す関係式 $\theta = \frac{\partial y_t}{\partial k_t} - n - \delta$ を用いるものである。[3] 従来，多くの研究で，この方法を

[3] 技術進歩が外生の動学モデルにおける最適条件は，$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \rho\left[\frac{\partial y_t}{\partial k_t} - n - \delta - \theta\right]$ であり，定常状態においては，$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = 0$ であることから，$\frac{\partial y_t}{\partial k_t} - n - \delta - \theta = 0$ である。

用いてRTPの値が推計されてきた。内生的成長モデルである本論文のモデルからは，この関係式は直接導きだすことはできないが，他に適当なRTPの推計方法が見当たらないことに鑑み，セカンド・ベストの方法として，$\theta=\frac{\partial y_t}{\partial k_t}-n-\delta$ の関係が成立していると仮定することとする。この仮定を導入すると，EIS の推計式は大幅に簡略化され，α，$\frac{\dot{c}_t}{c_t}$，$\frac{y_t}{k_t}$ の値のみから推計することが可能となる。

系 2： もし，$\theta=\frac{\partial y_t}{\partial k_t}-n-\delta$ であり，人口数 L_t が十分に大きければ $\rho=\frac{k_t}{\alpha y_t}\frac{\dot{c}_t}{c_t}$ である。

証明： $\frac{\partial y_t}{\partial k_t}=(1-\alpha)\frac{y_t}{k_t}$ であることから，もし $\theta=\frac{\partial y_t}{\partial k_t}-n-\delta$ であれば，

$$\frac{y_t}{k_t}-n-\delta-\theta=\alpha\frac{y_t}{k_t}+(1-\alpha)\frac{y_t}{k_t}-n-\delta-\theta=\alpha\frac{y_t}{k_t}$$

である。系 1 より，人口数 L_t が十分に大きければ，$\rho=\frac{\dot{c}_t}{c_t}\left[\frac{y_t}{k_t}-n-\delta-\theta\right]^{-1}$ であることから，$\rho=\frac{k_t}{\alpha y_t}\frac{\dot{c}_t}{c_t}$ である。

■

第4章　EIS の推計

4．1　従来の推計値

マクロ・レベルにおける EIS（あるいは，相対的危険回避度（RRA））の推計は，これまでの多くの文献においては，交換経済モデルに基づいて，実質金利や資産収益率の情報を用いて行われてきた。[4] それらの文献における EIS の推計値はゼロから 1 以上までと，非常に多様でバラつきがある。

Mehra and Prescott（1985），Hall（1988），Campbell and Mankiw（1989），Kandel and Stambaugh（1991），Cochrane and Hansen（1992），Obstfeld（1994）は，EIS はほぼゼロであると結論付けている（逆に言えば，RRA の値は，10 かそれ以上）。一方，Arrow（1971），Hansen and Singleton（1982, 1984）は，EIS は 1 かそれ以上と推計している（RRA の値としては，1 かそれ未満）。Epstein and Zin（1991）は，再帰的効用関数（recursive utility function）を用いた推計によって，EIS は 0.05～1 の間に，RRA は 0.4～1.4 の間にあると結論付けている。さらに，Ogaki and Reinhart（1998）は，EIS は 0.4 程度であると示唆しており，Jorion and Giovannini（1993）は，RRA は 5.4～11.9 であると論じている。

4．2　本モデルに基づく EIS の推計値

労働分配率 α，人口増加率 n，減価償却率 δ，消費増加率 $\frac{\dot{c}_t}{c_t}$，資本・産出高比率 $\frac{y_t}{k_t}$ の値としては，近代の工業国においてはごく自然と思われる以下の値を当てはめる。

労働分配率 α ：0.7
人口年間増加率 n ：0.01
年間減価償却率 δ ：0.05
消費年間増加率 $\frac{\dot{c}_t}{c_t}$ ：0.02
資本・産出高比率 $\frac{y_t}{k_t}$ ：0.33

これらの値は，Cooley and Prescott（1995）において，アメリカ経済のカリブレーションに用いられた値とほぼ同じである。RTP に関しては，上述のように，外生的技術進歩モデルに基づき $\theta=(1-\alpha)\frac{y_t}{k_t}-n-\delta$ となっていると考える。この式に上記の α，$\frac{y_t}{k_t}$，n，δ の値を当てはめると，RTPの値は，0.039となる。年 4 ％の RTP は，過去の多くの推計結果と整合

[4] この他、フィールド研究や実験に基づくミクロのデータを用いて、ミクロ・レベルでの EIS の値の推計も、数多く行われている。

的で標準的な値であるといえる。

さて，上記の値を基に，系１及び２に基づいてEISとRRAの値を計算すると，以下のようになる。

$$\text{EIS}：\rho=\frac{\dot{c}_t}{c_t}\left[\frac{y_t}{k_t}-n-\delta-\theta\right]^{-1}=\frac{y_t}{\alpha k_t}\frac{\dot{c}_t}{c_t}=0.087$$

$$\text{RRA}：\rho^{-1}=11.6$$

EIS＝0.087という結果は，従来の他の推計結果と比べると，中間というより低い値といえるかもしれない。本論文における推計は，これまでにない全く新しい生産経済モデルに基づく推計であり，従来の推計からは全く独立した推計である。したがって，本論文の結果は，マクロ・レベルでのEISの値は１ではなく，もっと小さい，0.1のオーダーの値でありRRAの値は10のオーダーの値であるというMehra and Prescott（1985），Hall（1988），Campbell and Mankiw（1989），Kandel and Stambaugh（1991），Cochrane and Hansen（1992），Obstfeld（1994）の主張を裏付ける独立した新たな証拠を提示するものであるといえる。

第5章　結論

マクロ・レベルでの EIS の推計は，従来交換経済モデルに基づいて行われてきた。こうしたモデルでは，外生的に与えられる実質金利が生産面の全てを代表するため，推計に当たっては，実質金利や資産収益率の情報が不可欠である。しかし，それらの推計値は，この外生的に与えられる実質金利や資産収益率の情報に大きく左右されてしまう。こうした問題を回避するためには，生産経済モデルに基づいて推計する必要があるが，内生的成長のメカニズムを有しないモデルでは推計は不可能である。一方，内生的成長モデルには，規模効果などの問題点が指摘されてきた。本論文では，規模効果等の問題点を克服した内生的経済成長モデルを構築することにより，生産経済に基づいての EIS の推計を行った。

本モデルに標準的なパラメーター等の値を代入することにより得られた推計値によると，EIS の値は，0.087である。これは従来の交換経済に基づく多くの推計値と比較すると，それらの中では低めの値と言える。本論文の推計値は，従来の交換経済に基づく多くの推計とは異なる新しい独立した推計であり，EIS の値は1よりかなり小さいという見方を支持する新たな独立した証拠を提供するものである。

参考文献

Aghion, Philippe and Peter Howitt. (1998) *Endogenous Growth Theory,* Cambridge, MA, MIT Press.

Arrow, Kenneth J. (1971) *Essays in the Theory of Risk-Bearing,* North Holland, Amsterdam.

Campbell , John Y. and N. Gregory Mankiw. (1989) "Consumption, Income, and Interest Rates: Reinterpreting the Time Series Evidence," in *NBER Macroeconomics Annual,* edited by Olivier Jean Blanchard and Stanley Fischer, pp. 185-216. Cambridge, MA, MIT Press.

Cochrane, John H. and Lars Peter Hansen. (1992) "Asset Pricing Explorations for Macroeconomics," in *NBER Macroeconomics Annual,* edited by Olivier Jean Blanchard and Stanley Fischer, pp. 115-169. Cambridge, MA, MIT Press.

Cooley, Thomas F. and Edward C. Prescott. (1995) "Economic Growth and Business Cycles," in *Frontiers of Business Cycle Research,* edited by Thomas F. Cooley, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Dinopoulos, Elias and Peter Thompson. (1998) "Schumpeterian Growth without Scale Effects," *Journal of Economic Growth,* Vol. 3, pp. 313-35.

Epstein, Larry G. and Stanley E. Zin. (1991) "Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: An Empirical Analysis," *The Journal of Political Economy,* Vol. 99, No. 2, pp. 263-286.

Hall, Robert E. (1988) "Intertemporal Substitution in Consumption," *The Journal of Political Economy,* Vol. 96, No. 2, pp. 339-357.

Hansen, Lars Peter and Kenneth J. Singleton. (1982) "Generalized Instrumental Variables Estimation of Nonlinear Rational Expectations Models," *Econometrica,* Vol. 50, No. 5, pp. 1269-1286.

Hansen, Lars Peter and Kenneth J. Singleton. (1984) "Errata: Generalized Instrumental Variables Estimation of Nonlinear Rational Expectations Models," *Econometrica,* Vol. 52, pp. 267-68.

Harashima, Taiji. (2013) "An Asymptotically Non-Scale Endogenous Growth Model," *MPRA (The Munich Personal RePEc Archive) Paper* No. 44393.

Jones, Charles I. (1995a) "Time Series Test of Endogenous Growth Models," *Quarterly Journal of Economics,* Vol. 110, pp. 495-525.

Jones, Charles I. (1995b) "R&D-Based Models of Economic Growth," *Journal of Political Economy,* Vol. 103, pp. 759-784.

Jones, Charles I. (1999) "Growth: With or Without Scale Effects?" *American Economic Review Papers and Proceedings,* pp. 139-44.

Jorion, Philippe and Alberto Giovannini. (1993) "Time-series Tests of a Non-expected-utility Model of Asset Pricing," *European Economic*

Review, Vol. 37, pp. 1083-1100.

Kandel, Shmuel and Robert F. Stambaugh. (1991) “Asset Returns and Intertemporal Preferences,” *Journal of Monetary Economics,* Vol. 27, pp. 39-71.

McGrattan, Ellen R. and Edward C. Prescott. (2003) “Average Debt and Equity Returns: Puzzling?” *Federal Reserve Bank of Minneapolis, Research Department Staff Report* 313.

Mehra, R. and Edward Prescott. (1985) “The Equity Premium: A Puzzle,” *Journal of Monetary Economics,* Vol. 15, pp. 145-161.

Mulligan, Casey B. (2002) “Capital, Interest, and Aggregate Intertemporal Substitution.” *NBER Working Paper* 9373.

Mulligan, Casey B. (2004) “What Do Aggregate Consumption Euler Equations Say About the Capital-Income Tax Burden?” *The American Economic Review,* Vol. 94, No. 2, pp. 166-170.

Obstfeld, Maurice. (1994) “Risk-Taking, Global Diversification, and Growth,” *The American Economic Review,* Vol. 84, No. 5, pp. 1310-1329.

Ogaki, Masao and Carmen M. Reinhart. (1998) “Measuring Intertemporal Substitution: The Role of Durable Goods,” *Journal of Political Economy,* Vol. 106, pp. 1078-1098.

Peretto, Pietro. (1998) “Technological Change and Population Growth,” *Journal of Economic Growth,* Vol. 3, pp. 283-311.

Young, Alwyn. (1998) “Growth without Scale Effects,” *Journal of political Economy,* Vol. 106, pp. 41-63.